論理的思考入門

Introduction to Logical Thinking

近藤　豊将

Atsumasa Kondo

はしがき

ケンブリッジ大学の経済学者アルフレッド・マーシャルは，時間を見つけては自ら貧困街を歩き，学生たちに**冷徹な頭脳と温かい心**（Cool Head and Warm Heart）の重要性を説いたと言われている．社会を良いものにしていくためには，困っている人を助けたい，人々の暮らしを改善したいという温かい心（Warm Heart）が必要なことについては，改めて強調するまでもないだろう．しかしながら，それだけでは十分ではない．現状を冷静に分析し理論的に考察する冷徹な頭脳（Cool Head）が不可欠である．熱した頭（Warm Head）では判断を誤り，ときに事態を悪化させることにもなりかねない．社会において「温かい心」を実際に形にしようと思うなら，一見遠回りのようでも論理的に物事を考え緻密な推論を積み重ねる訓練が求められるのである．

本書では，この重要な**論理的思考力**を養うことを目指す．難しく考える必要はない．アインシュタイン（プリンストン高等研究所）も言っているように，

すべての科学は，日常的思考を洗練したものにすぎない

のである．

巷には『ロジカル・シンキング』,『論理学入門』などと題する良書も少なくない．それらと比較したときの本書の特徴は，以下の点にある．本書は，個別的な知識を提供しようとするものではないし，また，読者を論理学の専門書にいざなうことも意図していない．読者自らが，自分が興味を持つ分野の書物を正確に読みこなせるようになるために最小限必要な**思考の作法**をシステマティックにまとめたものである．

近年,「問題発見，課題解決能力が大切である．そのような能力を涵養するためには，学び続けなければならない」と言われる．だが，各分野の初歩的な部分だけをいくら学習しても知識の質はなかなか上がらないし，あまり身に付かないまま忘れていくことも多いため，知識量も効果的には増えない．かと言って，専門書は数式のヤマだし，数学書は定義，定理，証明の果てしなき連鎖である．専門書や数学書の内容を理解・吸収するためには，数式に惑わされることなく，定理や証明の形で著者が語っている話のロジック（論理）を着実に理解していくことが必要であろう．本書では，日常の身近な事例と簡単な数学からの具体例を多用しながら，**論理の読み解き方**と**扱い方**を説明していく．本書を読了されれば，高度な数学的証明をも，**日常的な思考の自然な延長**としてイメージ豊かに理解できるようになる．

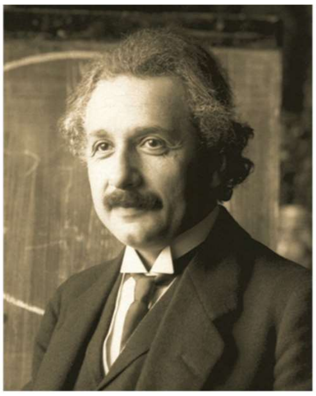
本書は，主対象としては大学新入生を想定しているが，実際にはより多くの方々にとって得るところが多いように工夫した．第1に，必要な予備知識を最小限に抑えて叙述（じょじゅつ）をすすめた．本書を読むためには，大学の専門科目の知識は一切不要である．数学についても，高校の数学Ⅰの授業をまどろみの中で聴いたことがある程度で十分である．第2に，各講義を短く保ち，見開きごとに一講を配置することによって，スキマ時間を活用して心地よいペースで学習を進められるようにした．第3に，多くの図を活用し，重要なポイントが視覚によっても記憶に定着しやすいようにした．これらの特長により，本書は，大学生のみならず，意欲的な高校生の皆さんや忙しい社会人の方々などにとっても有益と思われる．

この小著を読み終えた方が，論理的思考に親しみ，これまで難解に思えて敬遠してきた数学書などにもひるむことなく取り組めるようになれば，著者としてこれに勝る喜びはない．

最後に，本書の草稿全体に目を通し，コメントをいただいた同僚の内藤雄志先生にお礼を申し上げます．

2020年　初秋

アルフレッド・マーシャル
Alfred Marshall　1842-1924



アルベルト・アインシュタイン
Albert Einstein　1879-1955

《本書の読み方に関する注意》

本書では，第 4 講までが準備編，第 5 講から第 15 講までが基礎編，第 16，17 講が応用編，第 18 講から第 24 講が発展編，第 25 講が補論である．

準備編　第 1 講〜第 4 講
基礎編　第 5 講〜第 15 講
応用編　第 16 講〜第 17 講
発展編　第 18 講〜第 24 講
補論　　第 25 講

応用編の第 16 講と第 17 講（数学的帰納法）はやや独立しており，第 12 講に続けて読むことができる．また，応用編の知識はその後の部分には要求されないので，飛ばして読んでもよい．第 25 講は経済学部生向けなので補論としたが，第 11 講に続けて読むことができる．例えば，忙しい社会人の方は，第 11 講まで読んで第 25 講（補講）に飛び，余裕があるときに第 12〜15 講（基礎編の残り）を読むなど，工夫して活用していただきたい．

以下に，本書の読み方についての案を，読者のタイプごとに何通りか挙げておこう．

文系学部の 1 年生

第 1 講〜第 15 講（準備編と基礎編），第 25 講（補論）をこの順で読む．
第 16 講と第 17 講は，授業で数学的帰納法が出てきたときに参照する．

理系学部の 1 年生

第 5 講から第 24 講まで（基礎編，応用編，発展編）を通読する．
興味に応じて補論も読む．
（第 4 講までの準備編は，大半は既知であろうが，必要なら目を通す．）

社会人

第 1 講〜第 11 講，第 25 講（経済学部生向けの補論）をこの順で読む．
余裕があるときに第 12〜15 講（基礎編の残り）を読む．

高校生

第 1 講〜第 17 講（準備編，基礎編，応用編）を通読する．

数式がどうしても苦手な方

第 5 講〜第 15 講（基礎編）の文章の部分のみを拾い読みする．

目次

第 1 講　集合

ここでは，集合について説明する．**集合**（set）とは，**ものの集まり**のことである．
ただし，集まる範囲のあいまいな対象は集合としては扱わない．『ものすごく大きい数の集合』，『ちょっと小粋（こいき）な旅がらすの集合』などといっても，主観により判断が異なるので，明確な考察対象とするには不適切である．

『背の高い子供の集合』では不都合だが，『ある小学校のあるクラスに所属する子供の集合』なら，範囲が明確なので集合として扱える．

$\boxed{\text{例}}$ 『大江戸小学校 6 年 A 組の子供の集合』は集合の例である．

この集合を C と書くことにしよう．（children の頭文字である．）

大江戸小学校 6 年 A 組の女子の集合 G（girls の頭文字）は，集合 C の一部分である．このようなものを元の集合の**部分集合**（subset）と呼ぶ．
このことを，C は G を**含む**（G は C に含まれる）といい，『G ⊂ C』と書く．記号⊂は，『含む』を意味する contain の頭文字である．

また，個々の子供を集合 C の**要素** または **元**（げん）（element）という．幾何学（きかがく）的な視点から説明するときなどには，**点**と呼ぶこともある．ここで，**幾何学**とは図形を扱う数学の一分野であり，幾何学的な説明とは図を用いて視覚に訴える説明方法のことである．

花子さんが，大江戸小学校 6 年 A 組に属していることを，

（1）　　『花子さん$\in$ C』

と表す．この記号$\in$は，要素を意味する element の頭文字と思っておけばよい．この場合，『花子さん$\in$ G』でもある．

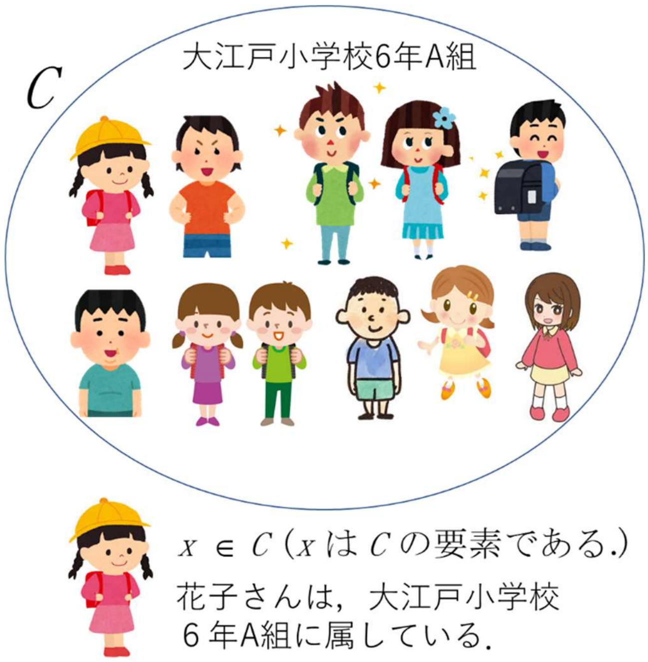
『花子さん』を文字xで表し，

（2）　　『$x \in$ C（ただし，xは花子さんを表す.)』

などを書けば，よりスマートだろう．また，要素を中カッコ｛　｝でくくって，集合を表すことも多い．

$$C = \{太郎君，花子さん，\cdots\}$$

というわけである．



《文章としての数式》

上の（1）や（2）（特に（2））は記号が並んでいるだけに見えるかもしれないが，これは『花子さんは，大江戸小学校 6 年 A 組に属している』という文章である．**数式が出てきたときは，文章に置き換えて意味を理解するようにする**とよい．数式が苦手という人は，この置き換えが苦手な場合が多い．本書では，コマメに数式と文章を相互に置き換える練習をしていく．

第 2 講　数の集合

集合の中でも特によく使うのは，“数”の集合である．**数学は**，（狭い意味では）**数の学問**なので，それも当然だろう．ここでは，数をその体系に沿って順に説明する．

最初に来るのは**自然数**（natural number）である．その集合は $\mathbb{N}$ と表す．もちろん，

$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ である．3 は自然数だが，2/3 や π はそうではないので，

$$3 \in \mathbb{N},\qquad \frac{2}{3} \notin \mathbb{N},\qquad \pi \notin \mathbb{N}$$

である．

$\mathbb{N} \leftarrow$ “中ぬき”の書体

自然数に 0 と -1，-2，-3 などを加えて，**整数**（integer）となる．整数の集合は $\mathbb{Z}$ と書く．つまり，$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ である．これは整数を表すドイツ語 Zahlen に由来する．整数は，ある意味で自然数を“拡大”したものであり，自然数の集合 $\mathbb{N}$ は，整数の集合 $\mathbb{Z}$ の部分集合となっている．記号を用いて書くと，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ である．

有理数（rational number）というのは，整数の比で表される数である．整数を分子と分母に持つ数といってもよい．ただし，負の有理数を表すにしても分子分母のどちらかは正に限定しても一般性を失わないし，分母はゼロにならない．このことから，分母の方を自然数とする場合が多い．よって，有理数の集合 $\mathbb{Q}$（割り算を表す quatient の頭文字）は，$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \ \text{:ただし，} m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{である．} \right\}$ と表される．

有理数を分数（比の形）ではなく小数で表現すると，割り切れて途中で途切れるか，または，出てくる数字が循環する．このことを例によって示そう．

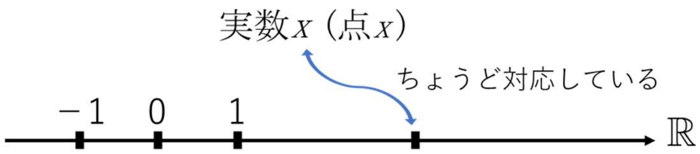
$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{1}{2}$ や $\dfrac{1}{3}$ は有理数であり，小数で表すと割り切れるか，数字が循環する．

(1) $\dfrac{1}{2} = 0.5$　　これは割り切れる．

(2) $\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots$　　これは3が循環している．

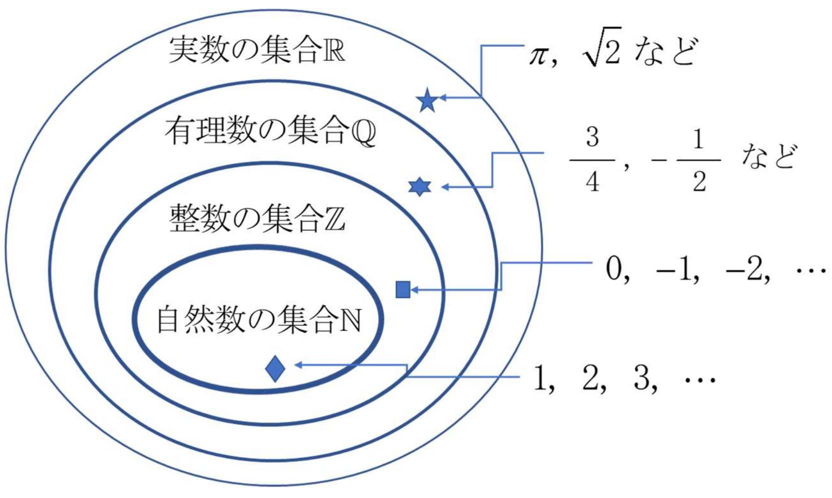
次は**実数**（real number）である．実数とは何かと真面目に問うと，実は大問題である．だが，ここでは有理数に**無理数**（irrational number）を合わせたものと思っておけばよい．無理数は，分数としては表されない数である．これを小数で表現すると，数字が無限に続き，それは循環もしない．円周率πや$\sqrt{2}$などが無理数の例として有名だろう．（$\pi = 3.14159\cdots$，$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$（「ひとよひとよにひとみごろ」.））

実数全体の集合は$\mathbb{R}$と書く（real number の頭文字）が，これは**数直線**（number line）と同一視できる．数直線は，下の図のようなスキマのない直線である．実数は必ず数直線の上にのっており，逆に数直線上の点には実数が対応する．（数直線上の点が，必ずしも自然数や整数，有理数を表すわけではない．）このことから，数直線は，“実数の集合$\mathbb{R}$を幾何学的に表現したもの”ということもできるだろう．



実数の集合を含むさらに大きな数の体系に**複素数**（complex number）があるが，本書ではそこまでは深入りしない．本書で用いるのは，ほとんど自然数と実数だけである．

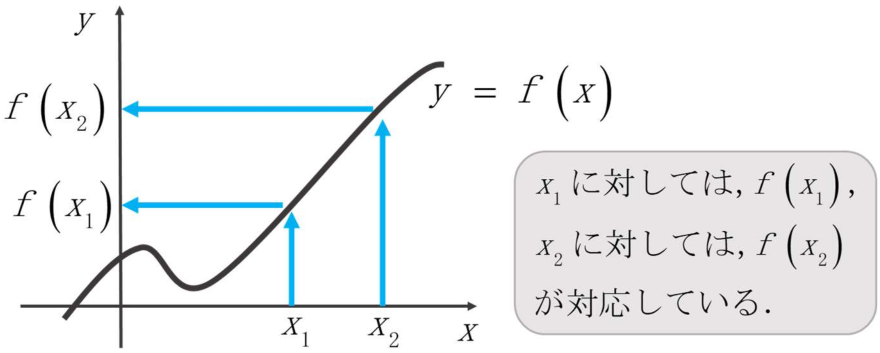
数の体系を図にまとめておこう．部分集合の記号を用いて表すと，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$である．“数”の概念が拡大されていく様子が見てとれるだろう．



第３講　関数とは

ここでは，関数について簡単に説明し，その値の計算例を示す．**関数**（function）とは，**「何か」に対して「何か」を対応させる規則**のことである．そして，$f\left(x\right)$という記号によって，『xに対して$f\left(x\right)$が対応している』ことを表す．

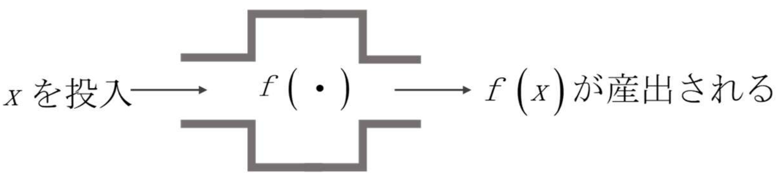
“関数の幾何学的表現”といえる**グラフ**を用いて表すと下図のようになる．



上では関数とは「何か」に対して「何か」を対応させる規則のことだと説明した．だが，関数の原語である function には「**機能**」という意味があり，「規則」よりも，「**働き**」といった方がいい面もある．その方が，

「xを投入するとそれに対して何らかの機能が働き，$f\left(x\right)$が産出されている」

という動的なニュアンスを感じられるかもしれない．この視点から，“ブラックボックス”を用いて下のように関数fとその機能を描画（びょうが）することもできる．



なお，xに対して生み出されている値$f\left(x\right)$を新たな変数yで書き，xを**独立変数**，yを（xに従属して値が決まってくるので）**従属変数**と呼ぶが，これらの用語は本書では特に用いる機会はない．

また，対応関係があるのだから，これは**因果関係**（いんが）（原**因**と結**果**の関係）ともみなせる．

・x が原因であり，結果として $f\left(x\right)$ が生み出された，

・原因が x_1 から x_2 に変われば，それに伴って結果は $f\left(x_1\right)$ から $f\left(x_2\right)$ に変わる．

関数 f はそのような変化の法則を表現している，というわけである．

関数とその値の算出を例示しよう．

$\boxed{例}$ $f\left(x\right) = x^2 - 1$ という関数は，

1 に対しては，$f\left(1\right) = 1^2 - 1 = 0$，

-3 に対しては，$f\left(-3\right) = \left(-3\right)^2 - 1 = 8$

を対応させる規則である．
では，a をある実数とすると，関数 f は，$a + 1$ に対して何を対応させるだろうか？

$f\left(x\right) = x^2 - 1$ の $\underline{x}$ の部分に $\underline{a+1}$ を代入して，

$$f\left(a+1\right) = \left(a+1\right)^2 - 1 = \left(a^2 + 2a + 1\right) - 1 = \underline{a^2 + 2a}$$

が対応するのである．この $a^2 + 2a$ ももちろん実数である．

$\boxed{練習}$ 関数 $f\left(x\right) = x^2 - 1$ について，変数 x に対する関数値を答えよ．

$x = -\dfrac{2}{3}$ に対する，関数値は $\boxed{（１）}$ である．

$x = 2a - b$ に対する，関数値は $\boxed{（２）}$ である．

ここで，$a, b \in \mathbb{R}$（つまり，a, b は実数）である．

$\boxed{解答}$ （１）$f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 1 = \underline{-\dfrac{5}{9}}$

（２）$f\left(2a - b\right) = \left(2a - b\right)^2 - 1 = \underline{4a^2 - 4ab + b^2 - 1}$（これも実数である．）

第 4 講　数列とは

実数が順番に並んでいるものを**数列**（sequence）といい，中カッコ｛　｝の中に数字を並べて表すことが多い．例えば，以下のようなものである．

$$\{x_n\}=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$$

数列$\{x_n\}$の**初項**は$x_1=1$，**第 2 項**は$x_2=1/2$，**第 n 項**は$x_n=1/n$というわけである．

集合と数列で同じ中カッコ｛　｝を用いている本が多く，本書もその流儀に従うが，両者（集合と数列）は区別されるべきである．集合とはものの集まりであった．ということは，ものを集めただけでそれを書き並べる順番は問われていない．それに対して，数列は並んでいる順番が大切なのである．

例えば，$\{2,\ 1,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$と$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$を考える．これらは，集合としては両者ともに自然数の集合$\mathbb{N}$と等しい．カッコ｛　｝の中身が同じだからである．だが，数列とみなすと，これらは別物である．初項と第 2 項が異なるからである．繰り返しになるが，これらは集合としては等しいが，数列としては異なるのである．にもかかわらず，同じ｛　｝を用いる．このような，記号の使い方は，慣れないうちはまぎらわしく感じるかもしれないが，内容を理解できていれば混乱することはない．

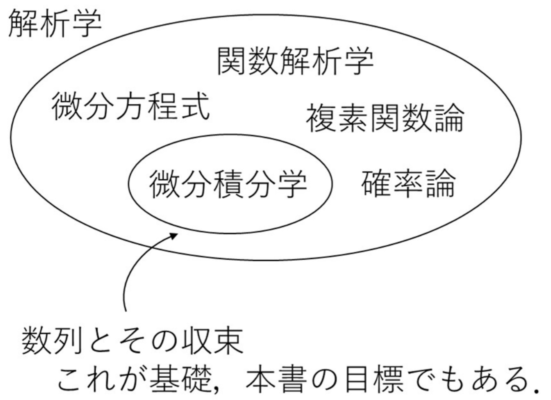
数列$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$の各項の右下についている小さい数字を**添字**（そえじ）（index）という．数列$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$は，添字として自然数を持つ．**自然数ひとつひとつに対して，実数が並んでいるものが数列**といってもよい．ただし，添字の集合としては$\mathbb{N}$に限らず，$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$などが使われることもある．この場合，ゼロ番目から始まる数列$\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\}$を考えるということである．

数列 $\{x_n\}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\ x_{n-1},\ x_n,\ x_{\boxed{n+1}},\ \cdots\}$

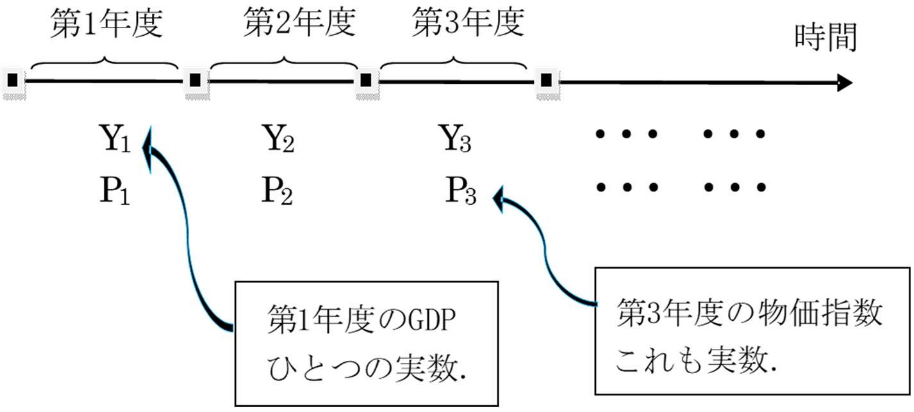
初項　第2項　第n項　添字（そえじ）

《数列の重要性》

数学を学ぶものにとって，数列は重要である．“数列とその収束”は，微分積分学などの解析学の基礎をなしている．その重要性に鑑(かんが)み，本書では数列の収束について正確に理解することをひとつの目標に置いている. それは, 本書のフィナーレを飾る第 22～24 講において詳細に取り扱われることになる．



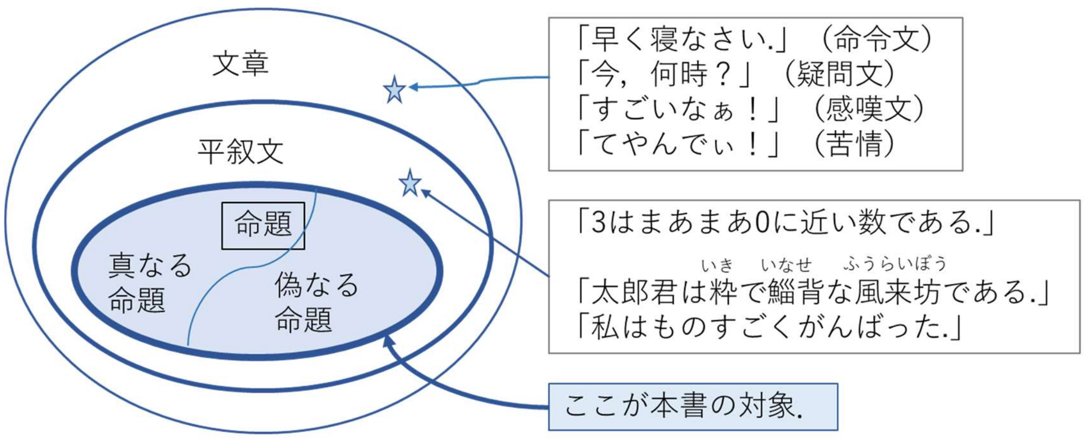
他の学問分野，例えば経済学においても，数列は重要となる．ニュースで頻繁(ひんぱん)に目にする国内総生産（GDP）や物価指数など，経済変数の年度毎の数字データの列は数列となる．（下の図を見よ.）これが，時間の経過とともに一定の値に収束するか，何らかの法則性をもって変動を繰り返すかなどは，経済学の観点から興味深い．数列に慣れておくことの意義は大きい. 以下では, 例や練習の素材として, しばしば数列を取り上げる．



第５講　命題とは

主語で始まりピリオドで終わる普通の文章（sentence）は，平叙文と呼ばれる．（日本語では，多くの場合，ピリオドではなく句点（マル）を用いる．）他にも，疑問文，命令文，感嘆文などももちろん文章である．平叙文には，『今日はうららかな小春日和です』，『100 はものすごく大きい数である』といった主観を述べたものも含まれる．

平叙文の中で**命題**（proposition）とは，**真（正しい）**（true）か**偽**（false）かの判定がつく文章のことである．『4 は偶数である』は真なる命題であり，『60 は 7 で割り切れる』は偽なる命題である．上で挙げたような主観が混入した平叙文は，真偽の判定がつかない，もしくは真偽を問うべき性格のものではないので，命題とは言わない．



練習 次の文は命題か？ 命題であるならば，その真偽（真か偽か）を答えなさい．

（１）$2 + 3 = 6$（言葉で表現すると，『2 に 3 を加えると，6 である』.）

（２）4 丁目のうどん屋はおいしい．

（３）○月○日に町内会が実施したアンケートの結果，有効回答数に対して 8 割以上の人が 4 丁目のうどん屋はおいしいと答えた．

（４）$\dfrac{1}{10}$は，0 に近い数である．

（５）$\dfrac{1}{20}$は，$\dfrac{1}{10}$よりも 0 に近い数である．

$\boxed{\text{解答}}$（１）偽なる命題である．

（２）個人の主観により判断が異なるので，命題ではない．
（３）命題である．真か偽かは，実際のアンケートの結果による．
（４）個人の主観により判断が異なるので，命題ではない．
（５）真なる命題である．

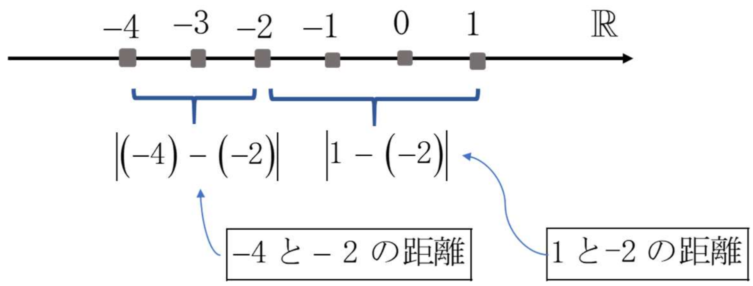
約束．本書で今後，『おいしい』，『安い』などの表現が出てきたときは，なんらかの客観的基準で判定がついているものとする．

《2 つの実数の間の**遠近関係**》

上の練習問題の（４）と（５）に関連して，ふたつの実数が近いか遠いかという関係をどう捉えるかを考察しておく．両者がどれぐらい離れているかを測るには，その**差の絶対値**をとる．これがふたつの実数の間の**距離**である．

$\boxed{\text{例}}$（１）１と－２の間の距離は，両者の差の絶対値 $\left|1-(-2)\right| = 3$ である．

（２）-4 と -2 の間の距離は，$\left|(-4)-(-2)\right| = 2$ である．



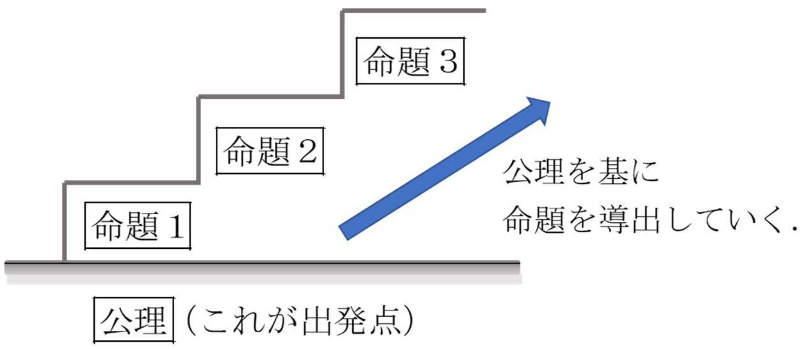
距離が定まれば，あとはそれを比較すればよい．（距離は実数なので，それらの大小を比較できる．）上の練習の例でいえば，0 と $\frac{1}{10}$ の距離は $\left|\frac{1}{10}-0\right| = \frac{1}{10}$ であり，0 と $\frac{1}{20}$ の距離は $\left|\frac{1}{20}-0\right| = \frac{1}{20}$ である．$\frac{1}{20} < \frac{1}{10}$ なので，『$\frac{1}{20}$ の方が，$\frac{1}{10}$ よりも 0 に近い』と明言できたわけである．
実数の集合と 2 点間の距離をセットにして考えることの意義は大きい．

コラム　公理，定理，命題，補助定理（補題），系

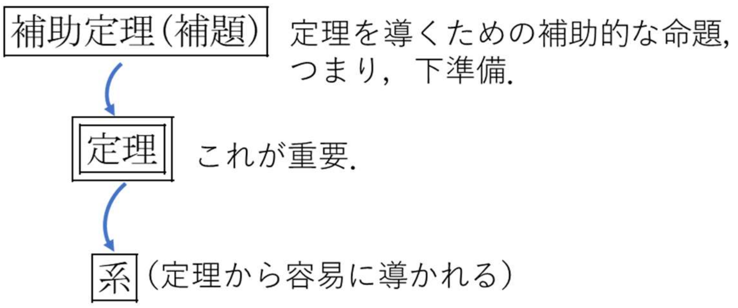
数学において，定理，命題，補助定理，系は，いずれも証明を経て「真である」と確認されるべき理論的事実である．（論理学では真なる命題と偽なる命題を考えるが，数学やその他の多くの学問分野では真なる命題にしか興味はない．）

公理（axiom）とは，理論の出発点として証明抜きで正しいと認める命題である．いくつかの命題が正しいという仮定から，別の命題が正しいと主張することを**推論**（inference）と呼ぶ．いくつかの公理（**公理系**）から推論により，ある命題が証明される．そして，すでに証明された命題と公理とを併せ用いて，次の命題が証明される．この方式で，有用な理論的事実が，命題の形で次々に導出される．異なる公理系を採用すれば，別の理論体系が構築されることになる．

公理については証明しないで真であることを認める，という点について，いま一度，読者の注意を喚起（かんき）しておこう．出発点を設定することなく，すべてのことを証明することは原理的にできない．



定理（theorem）とは，命題の中で特に重要なもののことである．定理を証明するのに用いられる補助的な命題のことを**補助定理**（または**補題**；lemma）と呼ぶ．ある定理からほとんど推論を経ることなく証明できるものを元の定理の**系**（corollary）という．



コラム　関数七変化

関数という言葉は中学校以来おなじみであろうが，大学以上ではこれに類する言葉がいくつも登場する．列挙してみよう：

①関数，　②函数，　③写像，　④作用素，　⑤変換，　⑥対応，　⑦関係．

高校までは，関数（function）は，「数に対して数を対応させる規則」という説明がなされる場合が多かったと思うが，一般には集合の各要素に対して、また別の（同じでもよい）集合の要素をひとつ対応させる場合に用いられる．例えば，集合｛グー，チョキ，パー｝の要素グーに対してはパー，チョキに対してはグー，パーに対してはチョキを対応させる規則などを考えてもよい．また，平面上の点にまた別な点を対応させる規則も考えられる．このように，より一般的な場面では（関数ではなく）**写像**（mapping）という言葉を使う場合が多い．ある点に対して“像を写す”，“（現実を地図に写すように）マップする”というニュアンスだろう．

この意味で，（日本語の）**関数**という言葉は，大学以上では“数に関係づける”ということで，対応している側が数の場合に限定して使うこともある．（ただし，関数の原語である function には，特に“数に”関係づけるという意味はない.）

関数は，②のように**函数**と書かれることもある．これは function の中国における訳語（hánshù）をそのまま輸入したものだが，函の字が常用漢字に含まれなかったために，後に“関数”が使われるようになったということだ．ただ，（第 3 講で説明したように）関数をブラックボックスとして捉えると，函（ハコ）を表すこの字が合っているせいか，いまでも（少数かもしれないが）“函数”の愛用者もいるようである．

第 3 講では，関数を「働き」という言い方でも説明した．この視点からは，④の**作用素**（operator）という言葉がフィットする．あるものに対してなんらかの作用が働き，別なものが生み出されるというわけである．

ある集合から同じ集合への写像を**変換**（transformation）と呼ぶ場合もある．特に，平面上の点を（同じく平面上の）他の点に写す場合には，平面に描かれた図形は別な図形に（変形されて）写ることになる．そのような幾何学的なイメージとともに“変換”という言葉が好んで用いられる傾向がある．（線形代数学の書物を紐解(ひもと)けば，線形変換という言葉が目に入ることもあるだろう.）

⑥**対応**（correspondence）と⑦**関係**（relation）は，日常用語として用いられることも多いが，専門用語としては写像（関数）の親玉，あるいは兄貴分といったところだろうか．関係については本書末尾の参考文献［9］を見ていただきたい．対応は数理的な経済学の中で頻繁(ひんぱん)に用いる分野もある．詳しくは［10］を参照されたい．

第 6 講　全称記号∀について

ここでは，**全称記号**∀について説明する．これは，all もしくは any の頭文字である A をさかさまに書いたものであり，『**すべての（任意の）～に対して**』という意味である．

『**任意の**』という日本語は聞き慣れないだろうが，「人の**意**思に**任**せる」ということで，「好きに選んでもかまわない」という意味である．

この記号の使い方について，例を用いて練習しよう．

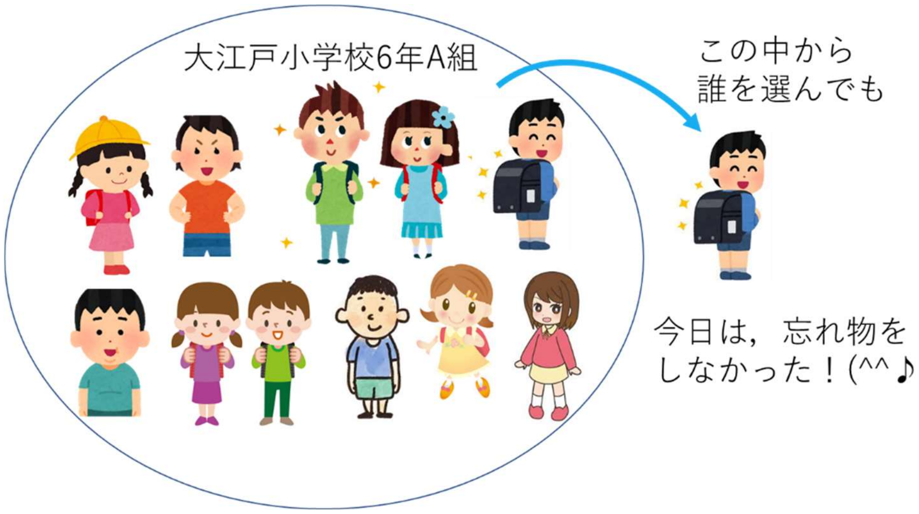
$\boxed{\text{例}}$ 大江戸小学校の 6 年 A 組では，今日は誰も忘れ物をしなかった．大江戸小学校 6 年 A 組のクラスの子供の集合を C とする（children の頭文字である）と，このことは，

『$\forall x \in \mathrm{C}$，今日 x は忘れ物をしなかった』

と表現することができる．

$x \in \mathrm{C}$ は，x が大江戸小学校 6 年 A 組に属す子供であることを表す．

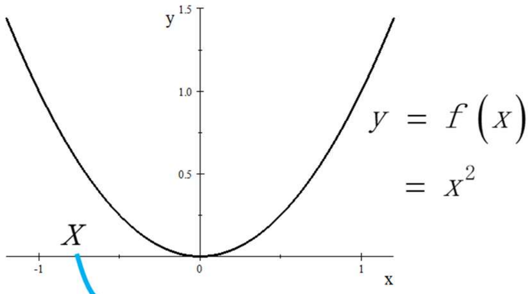
$\forall x \in \mathrm{C}$ は,『大江戸小学校 6 年 A 組に属す任意の子供を選んだとき…』ということで，言い換えると『大江戸小学校 6 年 A 組のどの子供を選んだとしても…』という意味である．



$\boxed{\text{例}}$ 関数 $f\left(x\right) = x^2$ を考える．このとき，『全ての実数 x について $f\left(x\right) \geq 0$ である』は真なる命題である．（どんな実数を 2 乗しても 0 以上だからである．）このことを，

$$『\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x\right) \geq 0』 \quad \text{または} \quad 『f\left(x\right) \geq 0 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}\right)』$$

などと書く．記号∀を省略して『$f\left(x\right) \geq 0 \quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$』と書くこともある．



どの x を選んだとしても
その x について，$f\left(x\right) = x^2 \geq 0$ となる．

$\boxed{\text{練習}}$ 数列 $\left\{x_n\right\} = \left\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\right\}$ があるとする．このとき，命題

『任意の自然数 n について，x_n が 10 以下である』

を，全称記号∀などの数式を用いて表現せよ．

$\boxed{\text{解答}}$ 数式を用いて表現すると，

$$『\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq 10』 \quad \text{または} \quad 『x_n \leq 10 \quad (\forall n \in \mathbb{N})』$$

となる．（全称記号を用いず『$x_n \leq 10 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$』などと表現してもよい．）

この条件を満たす数列として，例えば次のようなものがある．

・$\left\{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\right\}$（2 点 1 と 0 を繰り返しとり続ける数列）

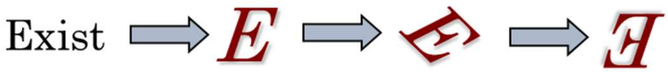
・$\left\{9,\ 9.9,\ 9.99,\ 9.999,\ \cdots\right\}$（単調に増えていくが，決して 10 を越えない数列）

・$\left\{10,\ 9,\ 8,\ 7,\ \cdots\right\}$（10 から始まり，単調に減っていく数列）

第 7 講　存在記号∃について

本講では，**存在記号**∃について説明する．これは，前講で扱った全称記号∀と，ある意味で対（ツイ）をなす．（第 9 講を見よ．）

記号∃は，英語の exist の頭文字の E をさかさまに書いたものであり，『**存在する**』という意味である．



この記号についても，例を用いて慣れておこう．

例　大江戸小学校の 6 年 A 組では，今日は忘れ物をした人がいる．このことは，大江戸小学校 6 年 A 組のクラスの子供の集合を C として，

『$\exists\, x \in \mathrm{C}$：今日 x は忘れ物をした』

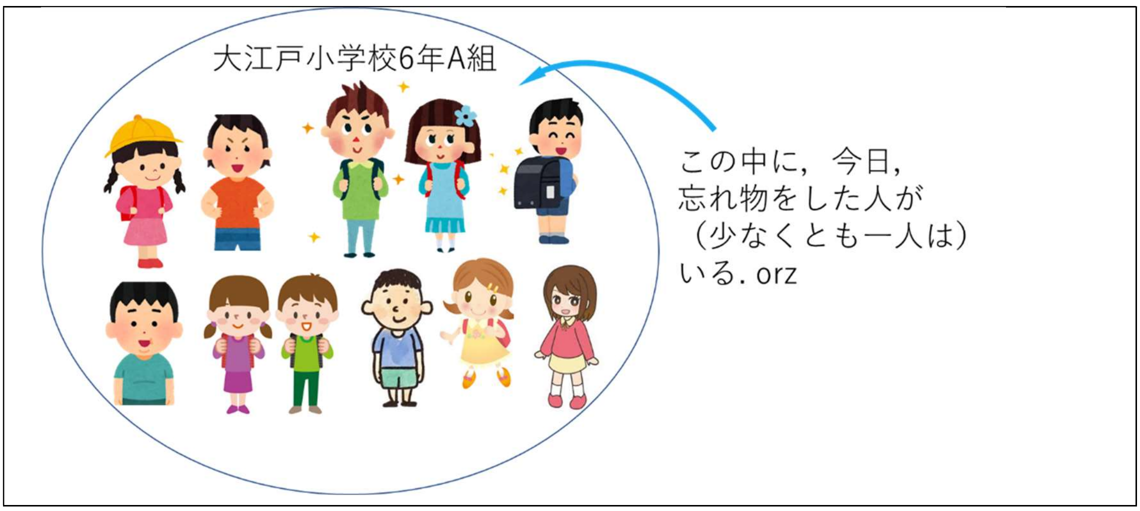
と表現することができる．

ここでのコロン：は，英語の"such that"を意味するので，

『$\exists\, x \in \mathrm{C}$　s.t.　今日 x は忘れ物をした』

と書くこともある．（このような記号は，人によって使い方が若干異なるが，内容を理解できていれば混乱することはない．）

今日忘れ物をした人は**一人でもいるなら**，上の命題は真となるが，二人以上いても，また極端な場合，全員が忘れ物をしていても，上の命題はやはり真になる．



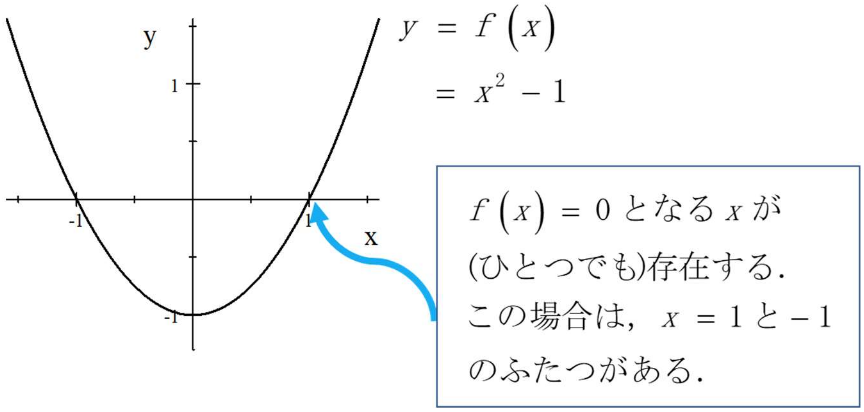
$\boxed{\text{例}}$ 関数$f\left(x\right) = x^2 - 1$を考える．このとき，

『ある実数xが存在して$f\left(x\right) = 0$である』

は真なる命題である．実数$x=1$が存在して$f\left(x\right) = 0$となるからである．

このことは，存在記号を用いると『$\exists x \in \mathbb{R}: \ f\left(x\right) = 0$』と表現できる．

$f\left(x\right) = 0$という条件を満たす実数が**ひとつでも存在すれば**，上の命題は真となる．この場合，$f\left(x\right) = 0$を満たす実数は，1と−1のふたつがある．いくらあってもかまわない．



$\boxed{\text{練習}}$ 『ある実数xが存在して，$f\left(x\right) < 10$となる』という命題を，存在記号∃を用いて表現しなさい．

$\boxed{\text{解答}}$『$\exists x \in \mathbb{R}: f\left(x\right) < 10$』または『$\exists x \in \mathbb{R} \ \text{s.t.}\ f\left(x\right) < 10$』となる．

『$f\left(x\right) < 10 \ \text{for some} \ x \in \mathbb{R}$』と書いても同じ意味である．

第 8 講　否定命題について

『A である』という命題に対して，『A ではない』という命題を元の命題の**否定命題**（negative proposition），または，単に**否定**（negation）という．記号$\neg$や$\sim$で表すことも多いが，本書では特に用いる機会はない．
元の命題が真であれば，その否定命題は偽になる．逆に，元の命題が偽であれば，その否定命題は真になる．

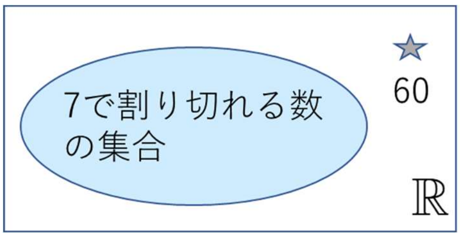
また，ある命題を否定し，それをさらに否定すると，元の命題に戻る．これを**二重否定の法則**（double denial law）という．

$\boxed{\text{例}}$ 『60 は 7 で割り切れる数である』は偽なる命題だが，その否定命題は，

『60 は 7 で割り切れる数ではない』

となり，これは真である．これをもう一度否定すると，二重否定の法則により，上の命題に戻る．

図を用いて確認しておこう．60 は，7 で割り切れる数の集合には属していない．このような図を**ベン図**（Venn diagram）という．（ベンというのは人名である．）ベン図は集合の包含（ほうがん）関係（含む，含まれるの関係）を表現するのに適している．



$\boxed{\text{例}}$ 関数 $f\left(x\right) = x^2 - 1$ を考える．（前講のグラフを参考にせよ．）このとき，

（$*$）　『$f\left(1\right) > 0$』

は，偽なる命題である．なぜなら，$f\left(1\right) = 0$ だからである．命題（$*$）の否定は，

『$f\left(1\right) \leq 0$』であり，これは真である．

《否定命題の必要性》

しばしば，否定命題を作成する必要が生じる．

第一に，**背理法**（reduction ad absurdum）という証明方法を用いる場合である．これは，証明したい結論を否定し，その上で矛盾を導出するという論法である．結論が成り立たないと仮定すれば，おかしな現象が発生してしまう．したがって，結論は正しいと考えざるを得ない．というわけである．この論法を用いるためには，証明の初めに，結論の否定命題を造ることができなければならない．第二に，本書でも第 15 講で扱う「対偶」を考えるときに，やはり否定命題を作る必要が生じる．第三に，ある文章や概念の意味がわかりにくい場合でも，その否定を知ることで，理解が深まる場合もある．（本書の第 24 講や第 25 講（補論）も参照せよ．）

必要に応じて自在に否定命題を作成できるようになることが望ましい．本書の次講（第 9 講），第 11 講，第 19 講では，ある型の命題の否定がどうなるかを調べることに主眼を置く．

どんな楯も貫く矛とどんな矛も防ぐ盾！

その矛でその盾をついたらどうなる？

これが“矛盾”である.

だが，その前にこれは盾と剣である.

第９講　記号∀∃と否定命題

ここでは，全称記号∀や存在記号∃が入った命題を否定するとどうなるかを学ぶ．

『全ての』を表す全称記号∀の入った命題『全ての～について，…となる』の否定は，

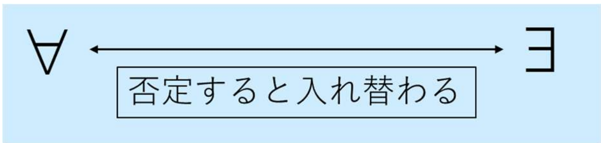
『ある～が存在して，…とはならない』

となるので，存在記号∃が現れる．

逆に，存在記号∃の入った命題『ある～が存在して，…となる』の否定命題を考えると，形式上，∃のところが全称記号∀に変わり，

『全ての～について，…とならない』

となる．



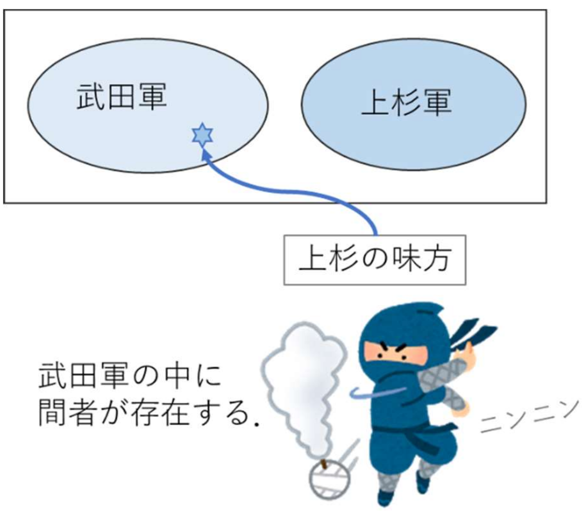
この点を例により確認しよう．

$\boxed{\text{例}}$ 命題（１）『武田軍の全ての兵士は，上杉の敵である』を否定すると，

（２）　『武田軍の中にある兵士が存在して，そのものは上杉の味方である』となる．

上の命題（１）とは異なり，（２）は武田軍の中に間者（かんじゃ）が存在することを示唆している．

下の命題（２）を否定すると，前講で述べた二重否定の法則により，（１）に戻る．
否定による相互変換（１）→（２）と（２）→（１）を改めて見直しておくと良い．



$\boxed{\text{例}}$ 数列$\{x_n\}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$があるとする．このとき，命題

（１）　『任意の自然数nについて，x_nは 10 以下である』

の否定命題はどうなるか？

命題（１）を記号を用いて表現すると，『$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\leq 10$』である．これを否定すると，

全称記号$\forall$の部分が存在記号$\exists$に変わり，『$\exists n\in\mathbb{N}:\ x_n>10$』となる．言葉で言い表すと，

（２）　『ある自然数nについて（ある自然数nが存在し），x_nは 10 より大きい』

となる．（武田軍と上杉軍の例になぞらえて，もう一度イメージを確認せよ．）

　この否定命題（２）を満足する数列の例としては，例えば以下のようなものがある．

・$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\}$（1 から始まり，単調に増えていく数列）

・$\{0,\ 20,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\}$（第 2 項のみが 20 で，後の項はすべて 0 の数列）

・$\{1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ 0,\ \cdots\}$（奇数番はその項の番号で, 偶数番はずっと 0 の数列）

$\boxed{\text{練習}}$ 関数$f(x)=x^2-1$を考える．このとき，

　『ある実数xが存在して，$f(x)=0$である』

は真なる命題であった．（第 7 講の例を参照のこと．）この否定命題を答えよ．

$\boxed{\text{解答}}$ 問題文の命題を記号で表すと『$\exists\, x\in\mathbb{R}:\ f(x)=0$』である．これを否定すると，記号$\exists$のところが記号$\forall$に変わり，『$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 0$』となる．言葉で表現すると

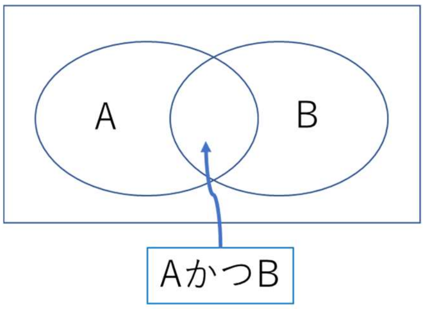
　　『どんな実数xについても，$f(x)=0$ではない』.

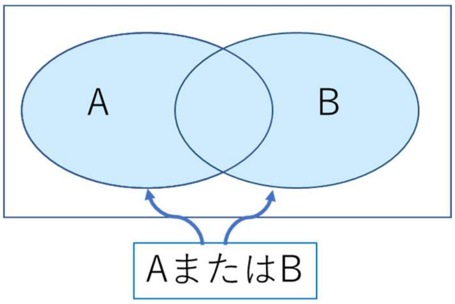
これは，偽なる命題である．$x=1,\ -1$については，$f(x)=0$となるからである．

第 10 講　かつ(and)とまたは(or)について

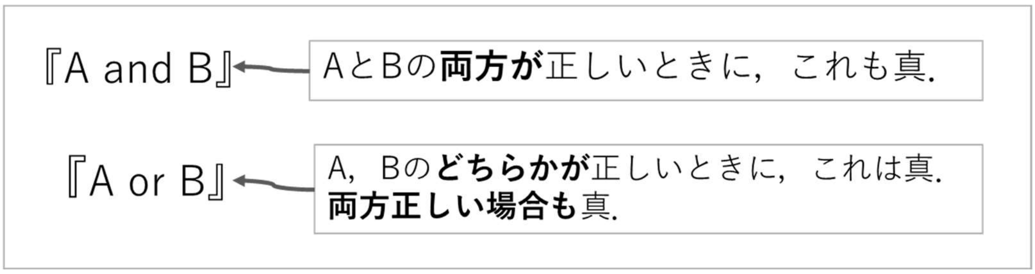
ここでは，かつ（and）とまたは（or）について学ぶ．これらは，記号∀と∃の場合と同様に，ある意味で対をなす．（次講を見よ．）

2 つの命題 A，B があるとき，それらを **and（かつ）** でつなげば新しい命題になる．
2つの命題 A と B をカンマ（,）でつないで書くと，特に断らなければ，『A and（かつ）B』ということである．
2 つの命題 A と B が**両方**真であるとき，命題『A and（かつ）B』も真である





同様に，2 つの命題 A，B を **or（または）** でつなげば新しい命題になる．
A と B の**どちらかが**真であるとき，命題『A or（または）B』も真になる．
A と B の**両方が**真のときも，『A or（または）B』は真である．

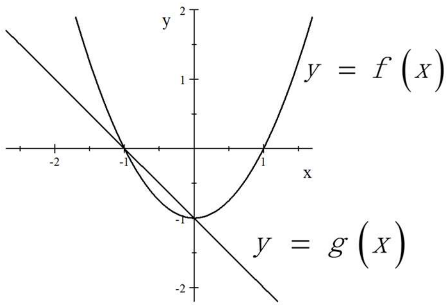


$\boxed{例}$ 2 つの関数 $f\left(x\right) = x^2 - 1$，$g\left(x\right) = -x - 1$ を考える．これらのグラフは，下の通りである．

まず，命題『$f\left(1\right)=0$ and $g\left(1\right)=0$』（通常『$f\left(1\right)=g\left(1\right)=0$』と書く）を考察しよう．これは偽なる命題である．$g\left(1\right) \neq 0$ だからである．かつ（and）でつながれた命題が真になるのは，つながれている両方の命題が真のときであった．

次に，『$f\left(1\right)=0$ or $g\left(1\right)=0$』を考察する．これは真である．（$g\left(1\right)=0$ は満たされないが）$f\left(1\right)=0$ が満たされるからである．どちらか一方が満足されれば，または（or）でつながれた命題は真である．

では，命題『$f\left(-1\right)=0$ or $g\left(-1\right)=0$』はどうか．これも真である．ふたつの命題 A と B の両方真の場合，『A または（or）B』という命題も真とみなす．



$\boxed{練習}$ 数列 $\left\{x_n\right\} = \left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\right\}$ について，以下の命題の真偽（真か偽か）を述べよ．

（1）『$x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 2,\ x_3 \leq 2$』（これは『$x_1,\ x_2,\ x_3 \leq 2$』と書く場合も多い.）

（2）『$x_1 \leq 2$ or $x_2 \leq 2$ or $x_3 \leq 2$』

$\boxed{解答}$ （1）偽なる命題である. カンマでつながれている場合, 通常, そこは『かつ（and）』と読むのであった．これは，三番目が満たされないので偽である．

（2）これは真である．最初のふたつが正しいからである．

第 11 講　「かつ，または」を含む命題の否定

ここでは，かつ（and）やまたは（or）が入った命題を否定するとどうなるかを学ぶ．

かつ（and）が用いられた命題『A and（かつ）B』の否定は，

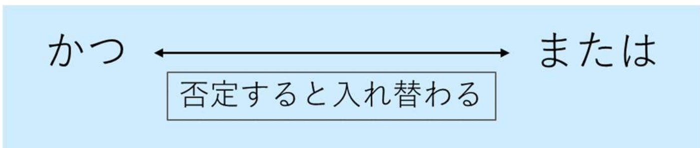
『A でない or（または）B でない』

となり，形式上 and が or に変わる．

逆に，or（または）の入った命題『A or（または）B』を否定すると，or の部分が and に変わり，

『A でない and（かつ）B でない』

となる．前講で，and と or が対をなすと述べた所以(ゆえん)である．



例を見るとよくわかる．

例　命題『花子さんは親切で頭がよい』を考える．（ここで，『親切』，『頭が良い』などは，なんらかの客観的な基準で判定可能だとする，というのが第 5 講で述べた約束であった．）

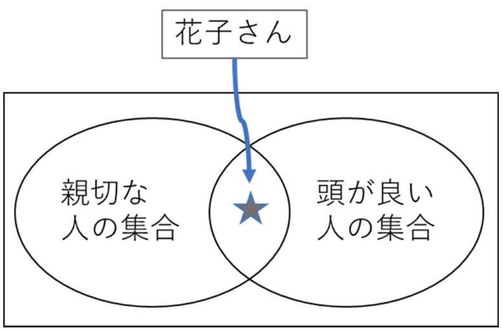
この命題は

(*)　　『花子さんは親切だ かつ（and）花子さんは頭がよい』

ということである．したがって，否定すると

(**)　　『花子さんは親切ではないか または（or）頭はよくない』

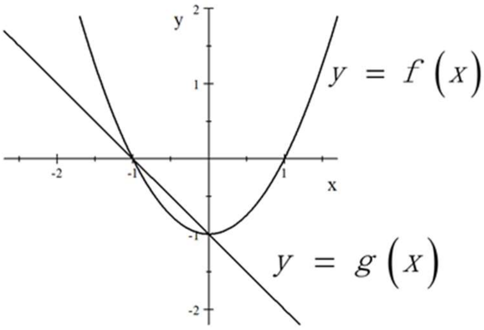
となる．そして，(**) を否定すると (*) に戻るのである．



練習 以下の命題の否定を述べよ．

（１）A 大学４年生の権左衛門（ごんざえもん）君は，試験前に「あとは，政治学か会計学かが取れれば卒業できる」と言っていたが，残念ながら卒業できなくなったようだ．権左衛門君の試験の出来は，どうだったのだろうか？

（２）２つの関数 $f\left(x\right) = x^2 - 1$，$g\left(x\right) = -x - 1$ が与えられている．（それらのグラフは下図の通りである．）このとき，命題『$f\left(1\right)$=g$\left(1\right)$=0』（これは，偽である）の否定を造りなさい．



解答（１）権左衛門君が卒業できなくなったということは，

『政治学の試験に合格する または（or）会計学の試験に合格する』

という条件が満たされなくなったということである．なので，その否定

『政治学の試験で不合格だった かつ（and）会計学の試験で不合格だった』

が成り立ってしまったということである．普通の言い方をすると，『権左衛門君は，政治学と会計学を両方落とした』となる．

（２）問題文は，『$f\left(1\right)$=0 and g$\left(1\right)$=0』ということである．（言葉で『関数 f, g は，$x = 1$ のときにともに０となる』と言ってもよいが，やや冗長だろう．）

これを否定すると，

『$f\left(1\right) \neq 0$ or $g\left(1\right) \neq 0$』

となる．言葉で表現すると，『関数 f は $x = 1$ のとき０とならない または（or）g は $x = 1$ のとき０とならない』である．普通の言い方をすると，『関数 f と g のいずれかは，$x = 1$ のとき０とならない』となる．（これは真なる命題である．）

第 12 講　条件命題とその逆

『A であるならば(⇒)B である』という型の命題を**条件命題**(conditional proposition)という．これは，

『A が満たされている状況では，常に B も満足される』

ということである．A を**前提**（premise），B を**結論**（conclusion）という．また，A は B を**含意する**（imply）という．意味として含んでいるというニュアンスだろう．

条件命題『A であるならば（⇒）B である』を否定すると，

『A が満たされているにもかかわらず，B が成り立たない場合がある』

となる．この点については，第 19，20 講で詳述する．

条件命題

『A であるならば（⇒）B である』

に対して

『B であるならば（⇒）A である』

を元の命題の**逆命題**（converse proposition），または単に**逆**（converse）という．

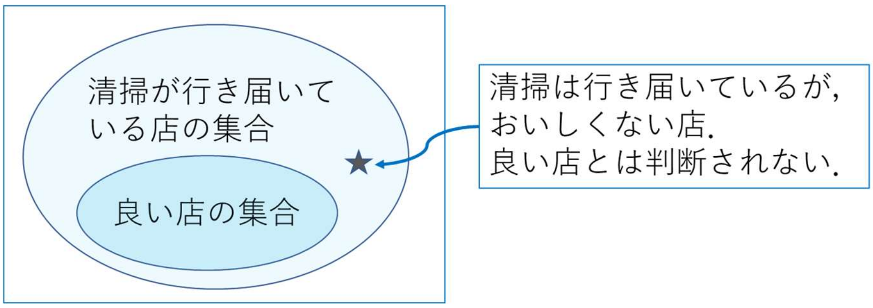
元の命題とその逆の真偽（真か偽か）**は必ずしも一致しない．逆は必ずしも真ならず！**

（ただし，一致する場合もある.）

例 条件命題『良い店であるならば，清掃が行き届いている』の逆は

『清掃が行き届いている店は，よい店である』

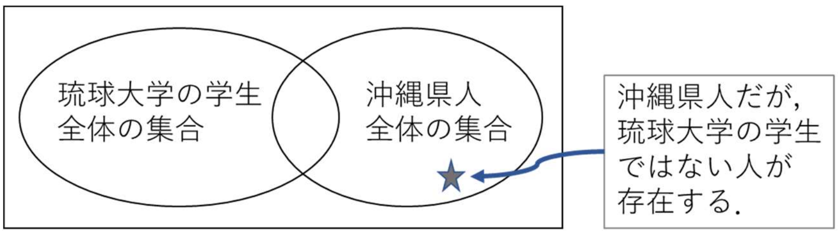
である. 元の文が真だとしても, 逆も真になるとは限らない. 清掃は行き届いているが, 味などに問題があり良い店とは判断されない店が（一軒でも）あれば，この逆命題は偽となる.



練習　次の命題の逆を述べ，真偽を判定せよ．

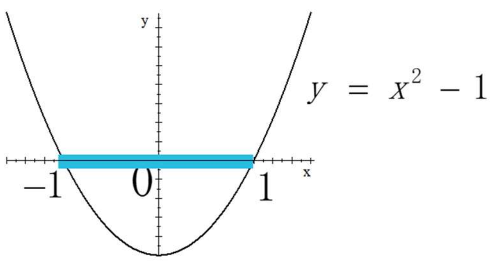
（１）ある数が有理数ならば，その数は実数である．（この命題自体は真である．）
（２）琉球大学の学生ならば，沖縄県人である．（偽）
（３）関数 $f(x) = x^2 - 1$ について，$-1 \leq x \leq 1$ ならば，$f(x) \leq 0$ である．（真）

解答（１）逆は，『ある数が実数ならば，その数は有理数である』となる．これは偽である．例えば，$\sqrt{2}$ や π は，実数ではあるが有理数ではない．
（２）逆は，『沖縄県人ならば，琉球大学の学生である』となる．これは偽もある．



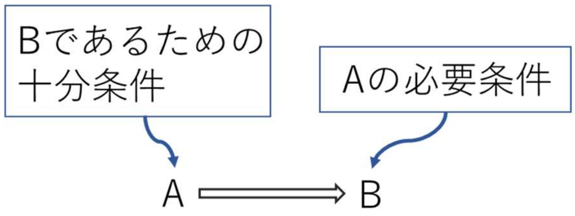
首里城（しゅりじょう）

（３）逆は，『$f(x) \leq 0$ ならば，$-1 \leq x \leq 1$』となる．これは真である．下のグラフで，$f(x) \leq 0$ となっている部分を見れば，その範囲は $-1 \leq x \leq 1$ に他ならないことがわかるだろう．



第 13 講　必要条件と十分条件

条件命題 A⇒B が真であるとき, A を B であるための**十分条件**(sufficient condition), B は A の**必要条件**（necessary condition）という.



まぎらわしいので，下の例を注意深く読んでニュアンスを理解してほしい.

$\boxed{\text{例}}$ 『良い店であるならば，清掃が行き届いている』という文章を考える.

このとき,『清掃が行き届いている』のは,『良い店である』ための必要条件である. 良い店だという条件をクリアするためには, 清掃が行き届いているくらいの条件は当然**必要**とされる，というニュアンスである.

『良い店である』というのは,『清掃が行き届いている』ための十分条件である. ある店が良い店だというのなら, 清掃が行き届いているというくらいの条件は**十分**に保証される，という感覚だろう.

例　ある企業において，

　　『ある人が支店長であるならば，その人は勤続 5 年以上である』

が真なる命題であるとする．この企業では，規定などにより，支店長になるためには勤続 5 年以上であるという条件が要求されるのだろう．この会社において，ある人が支店長になるためには勤続 5 年以上であることが**必要**とされる．また，仮にある人が支店長であるとするならば，その人が勤続 5 年以上であることは**十分**に保証される．

支店長になるためには，最低でも
5年以上の勤務経験が必要．

練習　関数 $f(x)$ についての命題『$-1 \leq x \leq 1$ ならば，$f(x) \leq 0$』を考える．

下の空欄を埋めよ．

　$-1 \leq x \leq 1$ は，$f(x) \leq 0$ の （1） 条件である．

　$f(x) \leq 0$ は，$-1 \leq x \leq 1$ の （2） 条件である．

解答

（1）十分　（2）必要

第 14 講　必要十分条件

ここでは，必要十分条件について学習する．

A⇒B と同時に逆命題 B⇒A も成り立つとき，A は B の（B は A の）**必要十分条件**（necessary and sufficient conditions），または A と B は互いに**同値**（equivalent）であるといい，

$$A \Leftrightarrow B$$

と書く．このとき，A と B の真偽は一致する．

$$\boxed{A \Longleftrightarrow B}$$

AはBの（BはAの）必要十分条件.
AとBは同値.
一方が真(偽)のときは，他方も真(偽).

例 ある国家資格は一次試験，二次試験，そして面接試験を突破すると，またその場合に限り合格となる．このとき，その国家資格に合格するための必要十分条件は，『一次試験，二次試験，面接試験（のすべて）に合格すること』である．

練習 惜しくも卒業を逃した A 大学の権左衛門君は，気を取り直して上の国家資格にチャレンジしたが，こちらも不合格となってしまった．試験の出来はどうだったのだろうか？

解答

この国家資格を取得するためには，一次試験，二次試験，面接試験を突破することが必要十分条件であった．換言すると，この国家資格を取得することと，一次試験，二次試験，面接試験に合格することは同値である．

それらの否定同士も同値であるから，権左衛門君が不合格になったということは，

『一次試験，二次試験，面接試験（のすべて）に合格』

という条件が満たされなかったということである．ということは，

『権左衛門君は，一次試験，二次試験，面接試験のいずれかに不合格となった』

ということである．

例 関数 $f(x) = x^2 - 1$ について．$-1 \leq x \leq 1$ と $f(x) \leq 0$ とは同値である．

論理記号を用いて表すと，『$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$』である．

別の言い方をすれば，$-1 \leq x \leq 1$ であることは，$f(x) \leq 0$ であるための必要十分条件である．このことを確認するためには，

必要性：$-1 \leq x \leq 1 \Leftarrow f(x) \leq 0$　（$-1 \leq x \leq 1$ は，$f(x) \leq 0$ の必要条件）

十分性：$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0$　（$-1 \leq x \leq 1$ は，$f(x) \leq 0$ の十分条件）

の両方をチェックすればよい．いずれも，第 7，10，11，12 講のグラフを参考にして容易に確認できるだろう．

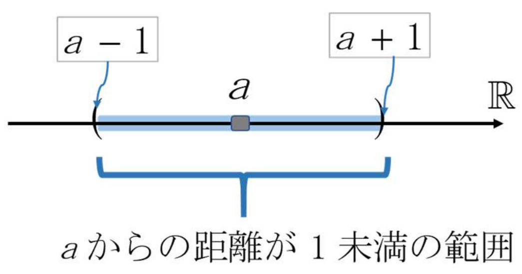
例 実数 a を固定して考える．ふたつの実数の間の距離は，両者の差の絶対値で測られるのであった（第 5 講）．したがって，『実数 x が a から 1 未満の距離しか離れていないこと』は，$|x - a| < 1$ と表される．これは，

$$a - 1 < x < a + 1$$

と同値である．この同値性を記号で表すと，

$$|x - a| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - 1 < x < a + 1$$

となる．下の図でいうと，実数 x が a を中心とした半径 1 未満の区間に属していることである．



第 15 講　対偶について

条件命題『A である ならば（⇒）B である』に対して，

　　『B でない ならば（⇒）A でない』

を**対偶**（contraposition）という．ある命題とその逆命題は必ずしも真偽（真か偽か）が一致しなかったが，**ある命題とその対偶は，互いに同値であり真偽が一致する**．
一方が偽なら，他方も偽となることに特に注意しておこう．（もちろん，真の場合についても同様なことが言える．）

いくつか例をあげて説明する．

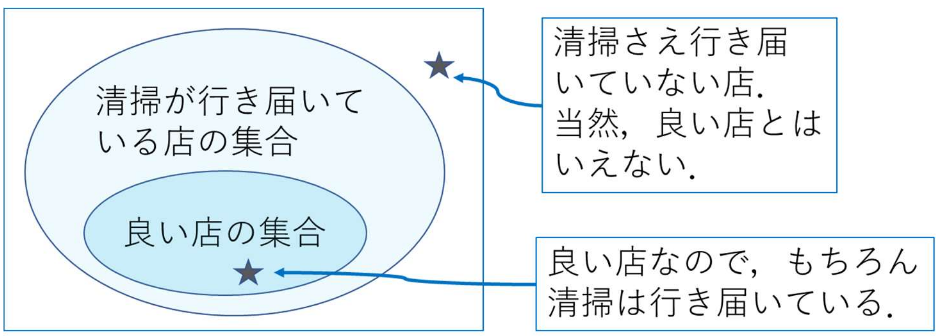
$\boxed{\text{例}}$ 『良い店であるならば，清掃が行き届いている』の対偶を考える．ある店について，

A :『その店は良い店である』，　　B :『そのお店は清掃が行き届いている』
とすると，元の文は『A ならば B』である．

A ではない：　『その店は良い店ではない』，

B ではない：　『そのお店は清掃が行き届いていない』

なので，元の文の対偶は，『清掃が行き届いていないならば，良い店ではない』となる．
もう少しこなれた日本語にして，『清掃さえ行き届いていないようでは，良い店とはいえない』と言った方がいいだろう．これは，元の文とまったく同じことの言い換えなのである．



例 『虎穴に入らずんば虎子（こじ）を得ず』という格言を考える．

A:『虎穴に入らない』,　　　B:『虎子を得ることができない』

とすると，元の文は『A ならば B』である．

A ではない：　『虎穴に入る』,

B ではない：　『虎子を得ることができる』

なので，元の文の対偶は,

『ある人が虎子を得ることができたとすれば，その人は虎穴に入ったはずだ』

となる．貴重なもの（虎子）を手に入れた人は，（過去に）必ず勇気ある行動（虎穴に足を踏み入れる行為）をとったはずだという意味である．


虎穴に入らずんば虎子（こじ）を得ず

ある文章や数式がわかりにくい場合でも，対偶をつくってみると，容易に理解できる場合もある．（下の練習問題の（1）を見よ.）また，ある命題が真であることを証明するにあたり，対偶を証明することも少なくない．必要に応じて対偶を自在に作成できるようになることが望ましい．（第 8 講で指摘した通り，そのためには否定を造ることができなければならない.）

練習 次の命題の対偶を答えなさい．

（1）ある人が微分積分学を勉強していないならば，その人は A 大学の卒業生ではない．

（2）関数 $f(x) = x^2 - 1$ について，$x \geq 1$ ならば，$f(x) \geq 0$ となる．（これは真なる命題である.）（第 7 講や第 12 講のグラフを参考にすればよい.）

解答（1）ある人が A 大学の卒業生であるならば，その人は微分積分学を勉強している．（A 大学で微分積分学が必修ならばこれは真であるが，そうでなければこれは偽なる命題となる．元の文も，真偽は一致する.）

（2）関数 $f(x) = x^2 - 1$ について，$f(x) < 0$ ならば，$x < 1$ となる．（これも真なる命題である.）

問題演習 その 1

前講までで本書の準備編と基礎編の叙述(じょじゅつ)を完了した．ここでは，これまでの理解を固めるために問題演習を行う．ここでの問題はこれまでの議論を若干補完する意味を持つが，先を急ぐ方はスキップしても本書の後の部分の理解には支障はない．

$\boxed{\text{問 1}}$（1）命題$-1 \leq x \leq 1$の否定を述べよ．

（2）実数xについての次の命題の否定を述べよ．『実数xは，小数で表現すると，割り切れて途中で途切れるか または 出てくる数字が循環する．』
（3）次の命題の対偶を述べよ．『犯人ならば，9 月 1 日午後 8 時にこの部屋にいた．』
（4）次の命題の対偶を述べよ．『親が怒らなければ，子供は勉強しない．』

$\boxed{\text{解答}}$（1）命題$-1 \leq x \leq 1$は，『$-1 \leq x$ かつ $x \leq 1$』ということなので，その否定は『$x < -1$ または $1 < x$』である．

（2）『実数xは，小数で表現すると，割り切れないでずっと続き かつ 出てくる数字は循環しない．』

解説．例えばπや$\sqrt{2}$はそのような数で，無理数というのであった（第 2 講を参照）．

（3）『9 月 1 日午後 8 時にこの部屋にいなかったならば，犯人ではない．』
解説．“アリバイ”は，この対偶を利用した無実の証明方法と言えよう．

（4）『子供が勉強すると，親は怒る』と答えたくなるかもしれない．だが，元の文は正しそうなのに，これは明らかにおかしい．ではどう考えればよいか．
問題の文章において，『親が怒らない』と『子供は勉強しない』の間には，タイム・ラグ（時間的なズレ）があると考える．
　『事前に親が怒らない場合，その結果として，現時点で子供は勉強していない』というわけである．その対偶を，「今子供が勉強すると，それを見て親が怒る」とするのは不適切だろう．結局，問題文の対偶としては，<u>『今，子供が勉強しているならば，その前に親が怒ったはずだ』</u>とすべきである．

問 2 あなたの友人の格三郎君（格さん）は，真面目だが女性の相手をするのは苦手である．あなたは助之進君（助さん）には会ったことはないが，助さんは格さんとは違うタイプだと聞いた．噂が本当なら，助さんはどのようなタイプだろうか？
（ヒント：ベン図を描いてみるとよくわかる.）

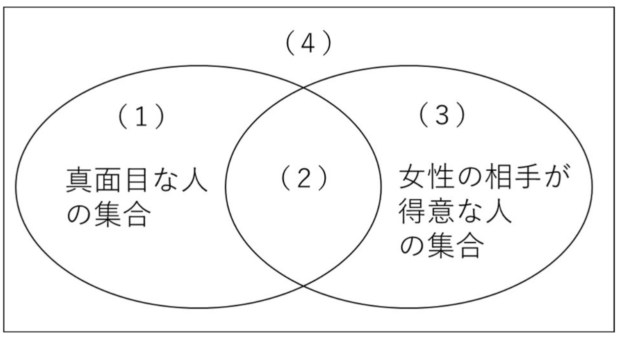
解答

格さんは，「真面目で かつ 女性の相手をするのは苦手」である．助さんは，それを否定したタイプということなので，(*)「真面目ではない または 女性の相手をするのは得意」というタイプなのだろう．

ベン図を描いてみるとこの意味がさらによくわかる．すべての人の集合を，「真面目か否か」と「女性の相手をするのが得意か否か」という 2 つの基準で分類すると，下の図のように 4 つの領域に区分されることがわかる．言葉で表現すると次の通りである．

（1）: 真面目だが，女性の相手をするのは苦手な人
（2）: 真面目で女性の相手をするのが得意な人
（3）: 真面目ではないが，女性の相手をするのは得意な人
（4）: 真面目でもなく，女性の相手をするのも苦手な人

格さんは，領域（1）に属している．助さんが属しているのは，格さんが属している（1）以外の領域のどこか，つまり（2）または（3）または（4）である．よって，解答 (*) をわかりやすく言い換えようとすると，次のようにいささか歯切れ悪くならざるを得ない：
『助さんは，以下のどれかのタイプである：（2）真面目で女性の相手をするのが得意であるか または（3）真面目ではないが，女性の相手をするのは得意であるか，または（4）真面目でもなく，女性の相手をするのも苦手か.』



$\boxed{問3}$ 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える．命題『点 x^* が関数 $y = f\left(x\right)$ の値を最大化する点であるならば，x^* での関数 f のグラフの接線の傾きはゼロである』について，次の問いに答えよ．

（１） この命題の対偶を述べよ．

（２） 下の空欄に『必要，十分，必要十分』のいずれかを入れなさい．

『点 x^* での関数 $y = f\left(x\right)$ のグラフの接線の傾きはゼロである』は，『x^* が関数 f の値を最大化する点である』ための $\boxed{}$ 条件である．

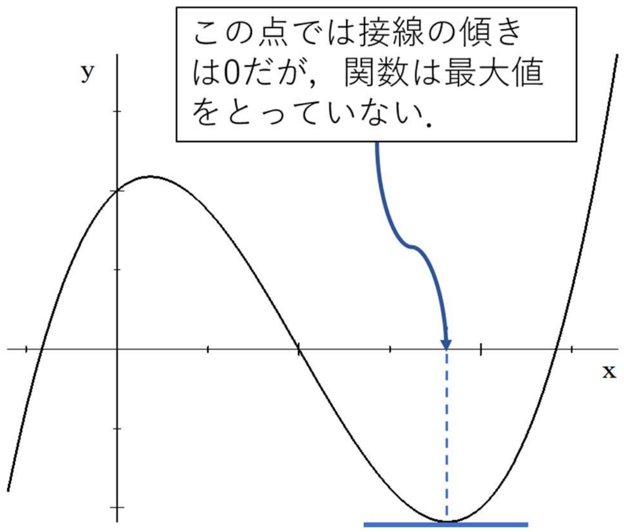
（３）逆を述べ，その真偽を検討せよ．

解答

（１）『点 x^* での関数 f のグラフの接線の傾きがゼロではないならば，x^* は関数 f の値を最大化する点ではない．』

（２）必要条件である．

（３）逆は，『点 x^* での関数 f のグラフの接線の傾きがゼロであるならば，x^* は関数 f の値を最大化する点である』となる．下の図のようなケースがあるので，（関数 f の形状について何の仮定も置かなければ）この逆命題は偽である．



$\boxed{\text{問 4}}$ 次の命題の真偽を理由とともに述べよ．

（1）数列$\left\{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots\right\}$について，ある自然数$n$が存在して第$n$項は$\dfrac{1}{10}$未満である．

（2）数列$\left\{1,\ 10,\ \dfrac{1}{3},\ 10,\ \dfrac{1}{5},\ 10,\ \dfrac{1}{7},\ 10,\ \cdots\right\}$について（これは，自然数$n$が奇数のときは$\dfrac{1}{n}$であり，$n$が偶数のときはずっと 10 のままというタイプの数列である），ある自然数nが存在して第n項は$\dfrac{1}{10}$未満である．

$\boxed{\text{解答}}$

（1）真である．実際，$n = 11$については，第 11 項は$\dfrac{1}{11}$なので，$\dfrac{1}{10}$未満である．

（2）真である．理由は（1）の場合と同じである．

注意.（1）の数列については，11 番目より先はずっと$\dfrac{1}{10}$未満である．

（2）の数列については,『ある所から先はずっと$\dfrac{1}{10}$未満』とは言えない.

第 16 講　数学的帰納法の原理

本講では，**数学的帰納法**（mathematical induction）という証明の方法について説明する．そのために，まずは次の例のように，各自然数ごとに（自然数ひとつひとつに対して）命題が定まっている状況を考える．

$\boxed{\text{例}}$ 数列$\{x_n\}=\{1,\ 2,\ 3,\cdots\}$が与えられている状況で，$P(n)$を下のように定める（P は，Proposition の頭文字）．

$$P(n)\text{: } n \text{ 以下の自然数 } k \text{ については，} x_k \text{ は100以下である．}$$

このとき，$P(1)$から$P(100)$までは真なる命題であり，$P(101)$以降は偽なる命題である．

上の例の場合は，自然数ひとつひとつに対して，命題とその真偽が定まっている．これは，"数列"ならぬ，**"命題列"**といってもよい．（自然数ひとつひとつに対して，数が定まっているのが，"数列"であった．第 4 講を参照のこと．）

命題列が真である，つまり，どのnについても$P(n)$が真であることを証明するためには，どうすればよいだろうか？ 自然数の数（無限個）だけ命題があるのだから，ひとつひとつ証明していったのでは永遠に終わらない．

数学的帰納法という証明方法は，このような場合に有効なのである．その手順は，以下の通りわずか 2 ステップである．

《数学的帰納法の手順》
Step 1. $P(1)$が正しいことを証明する．
（つまり，$n=1$ のときに命題が正しいことを証明する.）
Step 2. $P(k)$が正しいことを<u>仮定して</u>，それを使って
$P(k+1)$が正しいことを証明する．
ここで，kは任意に固定された自然数である.

たったこれだけで，どの自然数nについても命題$P(n)$が正しいことを証明できたことになる．

その原理は，**将棋倒し**と同じである．将棋倒しにおいては，『ひとつ前の駒が倒れたら，必ず次の駒も倒れる』ように注意深く駒を並べておけば，あとは最初の駒さえ倒せば，すべての駒が倒れていく．最初の駒を倒すことが上の Step 1 に相当し，『ひとつ前の駒が倒れたならば, 必ず次の駒も倒れる』という部分が Step 2 に対応するのである．

フォーマルに説明し直してみよう．上の Step 1, 2 の証明が完了したとする．

（１）まず $n=1$ の場合について，$P(1)$ が正しい（真である）ことは Step 1 で証明されている．

（２） $n=2$ の場合について．

Step 1 より， $n=1$ の場合について命題は正しい．

Step 2 で，『 $P(1)$ が正しいならば， $P(2)$ も正しい』ということは証明されている．

（Step 2 で $k=1$ とした場合である．）Step 1 で $P(1)$ が正しいことは証明しているのだから，したがって，Step 2 により $P(2)$ も正しいと結論付けることができる．

（３） $n=3$ の場合も同様である．

Step 1 より， $n=1$ の場合について，命題が正しいことは証明済み．

$P(1)$ が正しいことを証明したのだから，Step 2 により $P(2)$ も正しい．

$P(2)$ が正しいことを証明したのだから，**Step 2 をもう一度使い**， $P(3)$ も正しい．

以下同様に， $P(100)$ だろうが $P(500)$ だろうが，Step 1 からはじめて **Step 2 を有限回用いる**ことで真であることが保証されるのである．

第 17 講　数学的帰納法の適用例

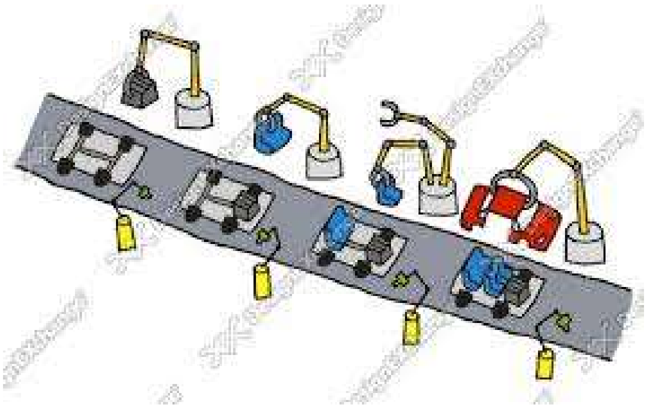
ここでは，数学的帰納法の適用例と若干の注意事項を述べる．

$\boxed{\text{例}}$ ある工場では，主にロボットによって流れ作業で製品を作っている．工程は全部で 10 ある．以下の 2 ステップが保証されていれば，製品はミスなく完成する．

Step 1. 最初に正しく原材料をセットする（これを工程 0 とする），あとは，

Step 2. 前の工程で正しく作業が行われているなら，次の工程でも正しく作業が完了する．

工程の数は，いくつでも関係ない．



《注意事項》

数学的帰納法の核心である“将棋倒し論法”が有効であるためには，命題列の添字（そえじ）の集合は，必ずしも自然数の集合 $\mathbb{N}$ でなくてもかまわない．1 からではなくゼロから始まる集合 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ であってもかまわないし，また $\{10,\ 11,\ 12,\cdots\}$ であってもかまわない．

命題列の添字集合が $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ の場合というのは，命題列 $P(0),\ P(1),\ P(2),\cdots$ が与えられている状況である．この場合，Step 1 として，$n=0$ のときに命題が正しいことを証明すればよい．そうすれば，Step 2 により，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ の場合にも正しいことが，順次保証されていく．（添字集合が $\{10,\ 11,\ 12,\cdots\}$ の場合には，Step 1 として，$n=10$ のときに命題が正しいことを証明すればよい．）

練習 自然数を 1 から n まで足した和を S_n と書くと，$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ となる．つまり，$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ が成り立つ．このことを証明しなさい．

解答 数学的帰納法により証明する．

Step 1．まず，$n = 1$ の場合について証明する．示すべきことは，$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ の n に 1 を代入した，$S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$，すなわち，$\underline{S_1 = 1}$ である．これは正しい．なぜなら，自然数を 1 から 1 まで足すと，その和は 1 だからである．

Step 2．次に k を任意の自然数として，以下では固定して考える．そして，$S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ が成り立つことを<u>仮定する</u>．その上で，$S_{k+1} = \dfrac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$ を示せばよい．この式は，S_k の式において，k の部分を $k+1$ に置き換えたものである．

改めてきれいに書き直すと，我々が示すべき目標は，$\underline{S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}}$ である．

さて，S_k は自然数を k まで足した和であり，S_{k+1} はそれにさらに $k+1$ を足したものである．ゆえに，$S_{k+1} = S_k + (k+1)$ である．ここで，上の<u>仮定</u>を用いると下を得る．

常に<u>示すべきこと</u>をはっきりさせながら進めば，難しい証明も恐れるに足らず！

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{1}{2}\left[k(k+1) + 2(k+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

これで証明は完了した．□

改めて将棋倒しをイメージし，ここでの式が n=100 の場合でも n=500 の場合でも成り立つことを納得せよ．

第 18 講　全称記号∀と存在記号∃の順序について

全称記号∀と存在記号∃については，書き並べる順序が重要である．順序を入れ替えるとまったく別の命題になってしまう．この点について，以下のような例を考えるとわかりやすい．

$\boxed{\text{例}}$ 大江戸小学校の子供の集合を C，考えられる服装の集合を F とする．ある日にちを決めると，

（1）　『すべての子供は，何らかの服装をして学校に来た』

はずである．（裸で登校してくる人はいないので，これは当然である．）この状況を記号で表現すると，

$$\forall \mathrm{a} \in \mathrm{C},\quad \exists x \in \mathrm{F}:\ \text{子供 a は服装}\,x\,\text{で学校に来た．}$$

となる．しかしこの場合，すべての子供が共通の制服を着ている状況を想像することはできない．個々の子供は，バラバラの服装をしている．

それに対して，制服を採用している学校では，服装が**すべての子供について共通に**定まっている．そのような状況を言葉で表現すると，

（2）　『ある服装が存在し，すべての子供は，その服装で学校に来た』

となる．この小学校の子供の集合を D として記号で表現すると，

$$\exists x \in \mathrm{F}:\ \forall \mathrm{a} \in \mathrm{D},\quad \text{子供 a は服装}\,x\,\text{で学校に来た．}$$

となる．

（1）と（2）を注意深く見比べ，ニュアンスの違いを確認してみよう．

（1）の場合と異なり，（2）については，全員統一された制服姿が想像できるだろう．全員が“一様な”服装をしているのである．

共通の服装（制服）が定まっていて，
すべての子供はその服装で学校に来る．

上の例によって，**全称記号∀と存在記号∃の順序が変わると，表現している事象がまったく異なってくる**ことが理解されよう．全称記号∀と存在記号∃の順序には注意を要するのである．やや微妙な問題なので，さらに例を挙げておく．

$\boxed{例}$ B大学には必修科目はまったくない．この大学の卒業生の集合をG，科目の集合をSとする．（Gはgraduates，Sはsubjectの頭文字である．）
必修科目はなくても，卒業するためには一定数の単位を取らなければならない．ゆえに，命題

『B大学のすべての卒業生は，ある科目に合格した』

は真である．記号で表現すると，

$\forall a \in G,\ \exists x \in S:$ 卒業生 a は科目 x に合格した

となる．

B大学で必修科目が設置されることになった．新制度の下での卒業生については，

『ある科目が存在して，B大学のすべての卒業生は，その科目に合格した』

が真となる．（旧制度の下では，必ずしもこれは真ではなかったことに注意しよう．）
記号で表現すると，

$\exists x \in S:\ \forall a \in G,$ 卒業生 a は科目 x に合格した

となる．

$\boxed{例}$ 数列 $\{x_n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$ を考える．当然であるが，各 $n \in \mathbb{N}$ ごとに x_n より等しいか大きい実数 M が存在して，$x_n \leq M$ となる．つまり，

（１）　$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R} : x_n \leq M$

が成り立つ．例えば，5に対しては，6（5でもよいし7でもよい）という実数が存在して，$x_5 \leq 6$ となるわけである．

では，（１）の全称記号の部分と存在記号の部分をひっくり返した次の命題はどうだろうか：

（２）　$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$.

これは，**数列のすべての項について共通の“天井”が存在する**ことを要求しており，いま考えている数列については成り立たない．
（２）を満たす数列の例としては，例えば次のようなものがある：

$\{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\}$，$\{3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ \cdots\}$，$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$.

第 19 講　条件命題の否定について

ここでは，『A であるならば，B である』という条件命題の否定を考える．これは，やや面倒であるが，（本書の最後で扱う）数列がある点に収束しないとはどういうことかを知るためなどに必要である．本講ではこの条件命題の否定について，身近な例を用いて丁寧に説明し，次講で関数や数列を用いた例を扱う．

$\boxed{\text{例}}$ 香川県はうどんで有名であり，“うどん県” とも呼ばれている．県内にはおいしいうどん屋が多い．次のような少々極端な命題を考えよう．（おいしいかどうかは，アンケートなどにより，裏付けられている．）

（1）　『国内のうどん屋について，おいしいうどん屋は，すべて香川県にある．』

この否定はどうなるか，いくつかのステップに分けて考えてみよう．

１．まず，命題（1）は，うどん屋を変数 x として，次のように言い換えることができる．

（2）　『国内の任意のうどん屋 x について，次のことが言える．
　　　x がおいしい店であるならば，x は香川県にある．』

これは，（1）と同じ内容であることに，再び注意しておく．

２．否定を考えるために，**記号を用いて表現し直してみる**．

x といううどん屋についての，次の 2 つの命題を

$A(x)$:『x のうどんはおいしい』,

$B(x)$:『x は香川県にある』

とする．また，国内のうどん屋の集合を U とする：

U: 国内のうどん屋の集合

このとき，上の命題（2）は，次のように言い換えることができる．

（3）　『$\forall x \in U,\ \left[A(x) \Rightarrow B(x)\right]$』

（誤解のおそれがなければ，大カッコ[　]は省いてもよい．）

ここで，**全称記号 $\forall$ が現れた**ことに注意せよ．

（1）から（3）は同じことの言い換えであることを，再度強調しておく．

３．これは，$A(x)$ が真であるならば，$B(x)$ も必ず真になる，ということなので，その否定は，$A(x)$ **であるにもかかわらず**，$B(x)$ **ではない場合がある**となる．

よって，（３）の否定は，**全称記号が存在記号に代わり**，次のようになる．

（３）の否定：『$\exists x \in U : \left[A(x) \text{は成り立つ かつ (and) } B(x) \text{は成り立たない} \right]$』

４．上の（３）の否定が（１）の否定になっているのだが，日常の言葉に直してみると，次のようになる．

（１）の否定：

『国内にあるうどん屋が存在し，その店はおいしいが香川県にはない．』

香川県以外に，ひとつでもおいしいうどん屋があれば，命題（１）は否定されたことになるのである．

A ならば, B である．

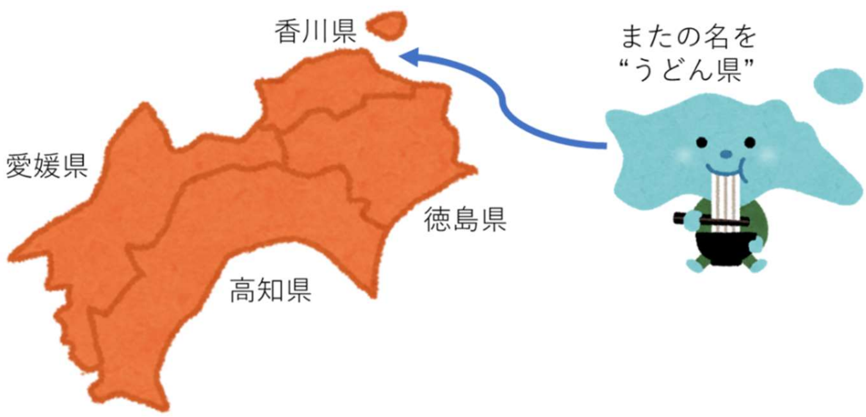
$\Updownarrow$ （変数 x を用いて同値な言い換え）

$\forall x \in U, \left[A(x) \Rightarrow B(x) \right]$

$\updownarrow$ （否定）

$\exists x \in U : \left[A(x) \text{ は成り立つ かつ (and) } B(x) \text{ は成り立たない} \right]$

(A であるにもかかわらず、B ではない場合がある.)

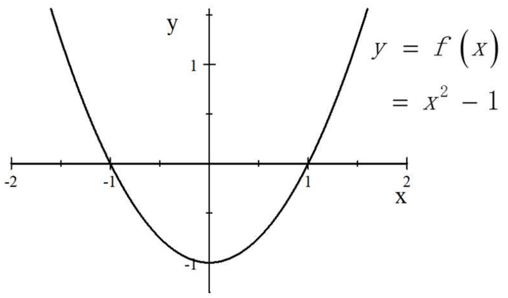


第 20 講　条件命題の否定の例

ここでは講を改めて，前講で学んだ条件命題の否定について，追加的に関数と数列を用いる例を挙げて練習する．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $f\left(x\right) = x^2 - 1$ が与えられている．（グラフは下の通りである．）

真なる命題『$x \geq 1$ ならば, $f\left(x\right) \geq 0$ である．』の逆と対偶，そしてそれらの真偽はどうなるか.



逆命題は,『$f\left(x\right) \geq 0$ ならば, $x \geq 1$』である．これは偽である．理由は以下の通り．この逆命題は，全称記号を用いて，

『$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \left[f\left(x\right) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1\right]$』

と書き直すことができる．これを否定すると，

『$\exists \mathrm{x} \in \mathbb{R}: \left[f\left(x\right) \geq 0 \text{ and } x < 1\right]$』

となる．この否定命題の方が真である．なぜならば，例えば $x = -1$ が存在して，$f\left(-1\right)\left(= 0\right) \geq 0$ かつ $x\left(= -1\right) < 1$ となるからである．

他方で，対偶は『$f\left(x\right) < 0$ ならば，$x < 1$ である』．これは真である．図から，一目瞭然（いちもくりょうぜん）であろう．（この対偶については，第 15 講ですでに扱った．）

$\boxed{\text{練習}}$ 数列$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$について，『$n \geq 5$ ならば，$x_n < \frac{1}{2}$』を否定するとどうなるか．真偽とともに答えよ．

注意．ここでは，$n \geq 5$と書かれているが，（数列$\left\{x_n\right\}$と書いてある時点で）nは自然数である．したがって，$n = 5,\ 6,\ 7, \cdots$と書いた方が正確である．ここで，カンマは，通常，『かつ（and）』を意味するのであったが，$n = 5$ and $n = 6$ and $n = 7 \cdots$ というのはありえない．これはどう理解すればよいか．

『$x_5 < \frac{1}{2}$ かつ $x_6 < \frac{1}{2}$ かつ $x_7 < \frac{1}{2}$ $\cdots$』と解釈するのである．このようなことは，慣れると誤解なく読み取ることができる．

$\boxed{\text{解答}}$ 問題文の命題は，

（1）　　『$\forall n \in \mathbb{N},\ \left[n \geq 5 \Rightarrow x_n < \frac{1}{2}\right]$』

と書き換えられる．これを否定すると，

（2）　　『$\exists n \in \mathbb{N},\ \left[n \geq 5 \text{ かつ } x_n \geq \frac{1}{2}\right]$』

となる．言葉で言い表すと，『5 以上のある自然数nがあって，第n項目は 1/2 以上である』．問題文の数列について，5 番目以降に 1/2 以上になる項は存在しない．ゆえに，この否定命題（2）は偽である．（問題文の命題（1）は真である．）

参考までに，条件（2）を満たす数列の例としては，$\left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\right\}$，$\left\{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\right\}$，$\left\{1,\ 10,\ \frac{1}{3},\ 10,\ \frac{1}{5},\ 10,\ \frac{1}{7},\ 10,\ \cdots\right\}$などがある．

$\boxed{\text{練習}}$ 数列$\left\{x_n\right\} = \left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\right\}$について，次の命題『$n \leq 3$ならば，$x_n < 3$』は偽である．理由を述べよ．

$\boxed{\text{解答}}$ 数列$\left\{x_n\right\}$の第 3 項は$x_3 = 3$である．よって，$n = 3$が存在して，$n \leq 3$であるにもかかわらず$x_n < 3$とはならない．したがって，問題文の命題は偽である．

第 21 講　前提が偽の場合の条件命題について

ここでは，前提が偽の場合の条件命題を扱う．これも取り扱いに注意を要する．
結論から言うと，**前提が偽の場合は，その条件命題は真とみなす**．

Aならば，Bである．
前提Aが**偽**の場合，条件命題全体は**真**とみなす．

以下に，その理由を説明する．第 19 講で，条件命題
（1）　『A であるならば，B である』
を否定すると,『A であるにもかかわらず，B でない場合がある』となることを学んだ．
記号を用いると，

（2）　『$\exists x \in U : \left[A(x) \text{は成り立つ かつ (and) } B(x) \text{は成り立たない} \right]$』

である．ここで，集合 U は，（第 19 講とは違ってうどん屋の U ではなく）考察対象の全体である普遍（ふへん）集合（universal set）を表す．

（2）をもう一度否定すると，存在記号∃は全称記号∀に代わるとともに，and も or に変わり，

（3）　$\forall x \in U, \left[A(x) \text{が成り立たない または (or) } B(x) \text{は成り立つ} \right]$

となる．

命題（3）について，その文章から明らかな通り，$A(x)$が成り立たない場合は真である．ところが，**この命題（3）は，元の命題（1）を二度否定したものなので**，（第 8 講で学んだ）**二重否定の法則より，両者の真偽は一致する**．
以上より，条件命題（1）『A であるならば，B である』について，前提 A が偽の場合，元の条件命題全体は真とみなすのである．

A ならば, B である.

$\Updownarrow$ (同値)

$\forall x \in U,\ \left[A(x) \Rightarrow B(x)\right]$

$\updownarrow$ (否定)

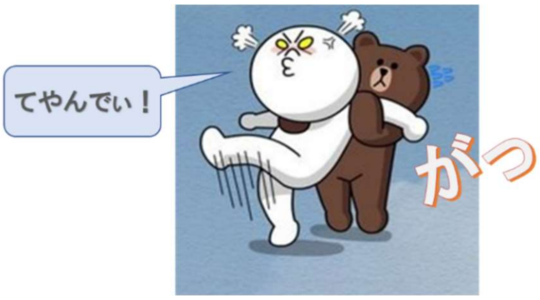
$\exists x \in U : \left[A(x)\ \text{は成り立つ かつ (and)}\ B(x)\ \text{は成り立たない}\right]$

$\updownarrow$ (否定)

$\forall x \in U,\ \left[A(x)\ \text{が成り立たない または (or)}\ B(x)\ \text{は成り立つ}\right]$

二重否定の法則より，これは元の命題と同値である.

$\boxed{\text{例}}$ これから家族で料理屋に食事に行く．江戸っ子気質の父親が,「安いなら，まずくても怒らない」と言っている．（父親は機嫌を損ねると江戸弁をまくしたてるため，少々やっかいである.）高い料理屋にいった場合は，どう考えればよいだろうか？ 上の発言の前提部分「安いなら」が満たされなくなるのである．したがって，怒っても怒らなくても発言とは矛盾しない．父親の口に合わなければ怒るかもしれないし，たとえおいしくても「高い！」と言って暴れるかもしれないのである．（その場合は，羽交い絞め（はがじ）にして取り押さえよ.）



$\boxed{\text{例}}$ 強盗に『動いたら撃つぞ』と言われた．これは『あなたが動いたならば，撃つ』ということである．あなたが動かずにじっとしていた場合，撃たれずに済むのだろうか？その場合は前提が偽となるので，上の条件命題自体は真となる．よって，強盗は，撃っても撃たなくても嘘をついたことにはならない．

第 22 講　数列の収束について

本講と次講，次々講では，本書の総まとめとして数列の収束を扱う．第 4 講でも述べた通り，これは数学（特に微分積分学）の基礎をなす．

数列$\{x_n\} = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$と実数$x$が与えられたとする．

このとき，$\{x_n\}$が実数xに**収束する**（converge）とは，どういうことか？

直感的には，次のように言えばよさそうである：

《数列の収束の直感的定義》

（1）　『nがものすごく大きくなるにつれて，$\{x_n\}$がxにドンドン近づくこと』.

しかし，この定義では少々問題がある．

例えば，数列$\{0,\ 0,\ 0,\ \cdots\}$を考えてみよう．このような数列は，ぜひとも『0 に収束している』と言いたい．（実際，下で述べる「正式な定義」により，そう言い切ることができる．）だが，この数列は最初から 0 であり『nが大きくなるにつれて，0 にドンドン近づいている』とは言いにくい．

そこで，数列の収束について，正式には次の定義が採用されている：

《数列の収束の正式な定義》

（2）　『どんな正の実数$\varepsilon > 0$をとっても，ある自然数n_0が存在し，

$n \geq n_0$ならば，$|x_n - x| < \varepsilon$となる』.

いくつか注意を与えておく．

・εはギリシャ文字で**イプシロン**と読む．ここでこの文字を使うのは，世界共通の慣習である．

・$n \geq n_0$とあるが，nは自然数の範囲で考えているので，$n = n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ \cdots$と書いた方が正確である．

・ふたつの実数x_nとxに対して，差の絶対値$|x_n - x|$は，両者がどれぐらい離れているか（両者の距離）を表している．この距離自体も実数である．

数列の収束の正式な定義（２）を全称記号と存在記号を用いて表現し直すと，

（３）　$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

となる．
これは，次のように解釈できる．
・最初に正の実数ε（イプシロン）を任意にとり，以後固定して考える．

・数列$\{x_n\}$について，nが小さい段階（正確にはnが下のn_0より小さいとき）では，

x_nについては何も問わない．xから離れていてもかまわない（そうでなくてもよい）．
・しかし，ある自然数n_0が存在し，そこから先の番号nについては，x_nとxの距離

$|x_n - x|$は最初に固定した正の実数ε未満になる．

・この意味で，最初に固定したεは“x_nとxとの食い違いの許容限度”と解釈できる．それゆえ，“非常に0に近い”正の実数というイメージであるが，論理的にはあくまでも“任意の”　正の実数である．

直感的な定義と正式な定義を比べると，次のように表現上の対応がつく．

直感的定義	正式な定義
nがものすごく大きいとき…	ある自然数n_0が存在して，$n \geq n_0$を満たす番号nについては…
x_nがxに近い	x_nとxの距離（＝実数$|x_n - x|$）が，最初に固定したε未満である

正式な定義においては，もはや『ものすごく大きい』，『近い』などのあいまいな表現が消えていることが見てとれる．

以上で，$\{x_n\}$が実数xに収束するということを正式に定義することができた．このとき，xを数列$\{x_n\}$の**極限**（limit）とよび，次のように書く：

・$\lim_{n\to\infty} x_n = x$，　・$x_n \to x\ (n \to \infty)$，　・$x_n \to x$ as $n \to \infty$．

ここで，記号∞はムゲンダイと読む．次講にて，数列の収束についてさらに説明を加える．

第 23 講　数列の収束：追加説明と例

前講のつづきで，数列の収束について説明を加え，さらには例を用いて数列が収束することの証明の練習をする．

引き続き，数列$\{x_n\}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$と実数$x$が与えられた状況を考える．数列$\{x_n\}$が実数$x$に収束するとは，以下が成り立つことであった：

（3）　$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\Rightarrow\left|x_n-x\right|<\varepsilon$

（εはギリシャ文字で，イプシロンと読むことも思い出しておこう.）

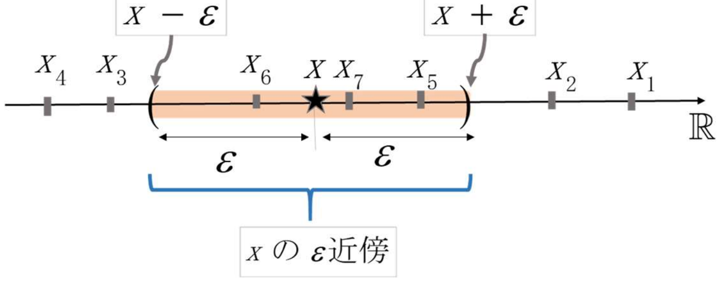
このことを，数直線を用いて別の角度から（幾何学的に）説明し直してみる．
いま，収束している数列$\{x_n\}$の各項とその極限$x\in\mathbb{R}$（下の数直線の星印★）が，下の図のような位置関係にあるとする．

・最初に正の実数εを決めた段階で，『xからε未満しか離れていない範囲』が確定する（その両端は，$x-\varepsilon$と$x+\varepsilon$である）.

この範囲をxのε**近傍**（きんぼう）（ε-neighborhood）と呼ぶ.

・ε近傍に対して（下図の数列の場合は）番号n_0として 5 が存在し，5 より大きいnについては，x_nはずっとε近傍に入っている.（n_0としては，6 でも 7 でもかまわない.）

・見方を変えると，数列の項でxのε近傍に入っていないのは，高々有限個（n_0-1個以下）である.



下の例と練習で，0 に収束する数列の例を挙げておく．

$\boxed{\text{例}}$ 数列$\{x_n\}=\{0,\ 0,\ 0,\ \cdots\}$は 0 に収束している．以下にその理由を述べる．

まず，正の数εを任意にとって固定する．それに対して，（例えばであるが）$n_0=5$が存在し，5 より大きい自然数nについては，数列の第n項$x_n\,(=0)$と極限の候補 0 の距離$|x_n-0|$は，0 なので正の数ε未満である．以上より，この数列は 0 に収束することがわかる．

注意．この例の場合は，n_0としてどの自然数を指定してもよい．

注意. 収束する数列の項は, この例のように最初からε近傍に入っていてもかまわない. また，いったん極限のε近傍に入った後，またその外に出て，その後，ε近傍に入ってくるという振る舞い方でもかまわない（問題演習その 2 の問 2 を見よ）．要するに，自然数n_0が存在して, そこから先の番号については極限のε近傍に入り続けていればよいのである．

$\boxed{\text{練習}}$ 数列$\{x_n\}=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$が 0 に収束することを証明せよ．

$\boxed{\text{解答}}$ まず，この数列の第n項は$1\ /\ n$であることに注意しておこう．εを任意の正の数とする．このとき，その逆数$1\ /\ \varepsilon$も正の実数である．（εが 0 に近いなら，$1\ /\ \varepsilon$はかなり大きい数になる．）n_0を$1\ /\ \varepsilon$よりも大きい自然数とすると$\frac{1}{\varepsilon}<n_0$なので$\frac{1}{n_0}<\varepsilon$であり，$n\ \geq\ n_0$を満たす自然数$n$については，$\frac{1}{n}\left(\leq\frac{1}{n_0}\right)<\varepsilon$となる．

以上で，次のことが言えた．任意に固定した正の数εに対してある自然数n_0が存在し，$n\ \geq\ n_0$を満たす自然数nについては$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$となる．

記号で表すと，$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\Rightarrow|x_n-0|<\varepsilon$が言えたのである．これは，数列$\{x_n\}$が 0 に収束していることを示している．□

注意．0 に収束するからといって，ある番号から先は$x_n\ =\ 0$となるわけではない．

第 24 講　収束しない数列

　引き続き，数列$\{x_n\}$と実数xが与えられた状況を考えている．ここでは，数列$\{x_n\}$がxに収束しないとはどういうことかを学ぶ.

　前講で扱った数列の収束の定義

（3）　$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

をさらに，条件命題の部分に全称記号を加えて丁寧に書き換えると，

（4）　$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon\ ]$

となる．これを否定すると，全称記号と存在記号が入れ替わるとともに，条件命題の部分は第 19，20 講で学習した通り，以下のようになる：

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0 \text{ and } |x_n - x| \geq \varepsilon.$$

特定の自然数をn_0，任意のものをnを書いた方がいいので，両者の役割を入れ替えて，下のように書くのが普通である：

《数列$\{x_n\}$がxに収束しないということ》

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n_0 \geq n \text{ and } |x_{n_0} - x| \geq \varepsilon.$$

言葉で表現すると,『ある正の数$\varepsilon > 0$があり，どんな自然数nをとっても，それ以上の自然数n_0が存在し，$|x_{n_0} - x| \geq \varepsilon$となる』である.

$\boxed{\text{練習}}$ 数列$\{x_n\} = \{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\}$が 0 に収束しないことを証明せよ.

$\boxed{\text{解答}}$ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$とする．この数列は，0 と 1 の間を行ったり来たりしており，どんな自然数nをとっても，そのnかまたは次の$n+1$では値は 1 になる．したがって，その 1 になる方の番号をn_0とおくと，$|x_{n_0} - 0| = |1 - 0| \geq \dfrac{1}{2}$となる．以上で次が言えた：

$$\exists \varepsilon \left(= \frac{1}{2}\right) > 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n :\ |x_{n_0} - 0| \left(= |1 - 0|\right) \geq \varepsilon.$$

これは，この数列が 0 に収束していないことを示している.

注意．明らかに，この数列は１にも収束していないし，その他のどの数にも収束していない．(2 に収束していないことを証明してみよ（問題演習その 2 の問 3)．)

《数列の上極限（じょうきょくげん）と下極限（かきょくげん）》

上の練習で見たように，数列に対して，常に極限が存在するとは限らない．そこで，極限を一般化した**上極限**（limit sup），**下極限**（limit inf）という概念を考えることがある．数列$\{x_n\}$の上極限と下極限は，それぞれ次のように書く：

上極限：$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$　または　$\limsup_{n\to\infty} x_n$ ；

下極限：$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$　または　$\liminf_{n\to\infty} x_n$.

これらは次の性質を持つ．

・上極限と下極限は，任意の数列について必ず存在する．(ただし，±∞になる場合もある．)

・収束する数列については，これらはともに極限と一致する．(下の例の（５）を見よ．) この意味で，上極限と下極限は極限の一般化である．

ここでは，上極限と下極限について，例をもってイメージをつかんでもらうにとどめるが，高度な解析学を学ぶ上で，(極限を一般化した) これらの概念は有用であることを覚えておくとよい．

$\boxed{\text{例}}$（１）数列$\{x_n\}=\{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\}$については，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=1$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=0$.

（２）数列$\{x_n\}=\{-1,\ 2,\ 3,\ -1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$については，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=3$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-1$.

（３）数列$\{x_n\}=\{1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ \cdots\}$については，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\infty$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=0$.

（４）数列$\{x_n\}=\{1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots\}$については，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\infty$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-\infty$.

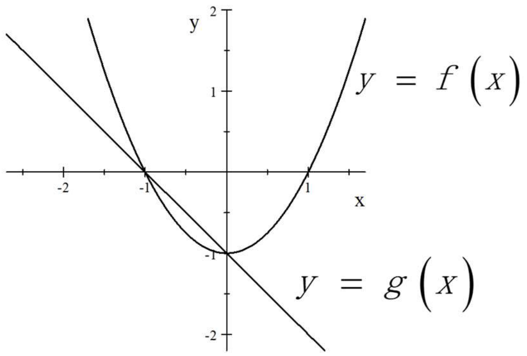
（５）数列$\{x_n\}=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$については，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

問題演習 その2

ここでは，発展編で少々消化不良だったかもしれない点について，問題演習の形で補足練習しておく．

$\boxed{\text{問 1}}$ 2つの関数 $f(x) = x^2 - 1$，$g(x) = -x - 1$（これらのグラフは，下の通り）と

命題（*）『$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$』を考える．



（1）命題（*）は真か偽か？
（2）命題（*）の逆命題とその真偽を述べよ．
（3）命題（*）の対偶とその真偽を述べよ．

$\boxed{\text{解答}}$ （1）これは偽である．なんとなれば，$x = 1$ が存在して $-1 \leq x(= 1) \leq 1$ であるにもかかわらず，$f(x) > g(x)$ となるからである．（ここでの x としては，$0 < x \leq 1$ の範囲の実数なら何でもよい．）

（2）逆は，『$f(x) \leq g(x) \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$』となる．これは真である．上のグラフを見れば，$f(x) \leq g(x)$ となるのは，x が $-1 \leq x \leq 0$ の範囲のときであり，このときは $-1 \leq x \leq 1$ となるからである．

（3）対偶は，『$f(x) > g(x) \Rightarrow [x < -1 \text{ or } 1 < x]$』であり，これは（1）と同じ理由で偽である．

$\boxed{\text{問 2}}$ ゼロに収束する数列で，いったん 0 の$\dfrac{1}{3}$ - 近傍（$-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$の範囲）に入るが，その後，そこから一度は出るような数列の例を挙げよ．

$\boxed{\text{解答}}$ 例えば，以下のようなものがある：

・$\left\{1,\ 0,\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \dfrac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \dfrac{1}{5},\ 0,\ 0,\ \cdots\right\}$.

この数列は，第 2 項で 0 の$\dfrac{1}{3}$ - 近傍 に入るが，第 4 項では$\dfrac{1}{2}$となり，そこから出てしまう．第 5 項ではまた 0 の$\dfrac{1}{3}$ - 近傍 に入り，第 7 項で$\dfrac{1}{3}$となり，またしてもそこから（ギリギリ）出る．第 8 項以降は，ずっと 0 の$\dfrac{1}{3}$ - 近傍 に入ったままとなる．

任意の正の数εに対して，ある番号が存在し，そこから先についてはこの数列の項は 0 のε近傍に入り続けることは明らかだろう．つまり，この数列は 0 に収束している．

$\boxed{\text{問 3}}$ 数列$\{x_n\} = \{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\}$が 2 に収束しないことを証明せよ．

$\boxed{\text{解答}}$ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$とする．この問においては，極限の候補は 2 である（実際には極限にならない）．この数列は，0 と 1 の間を行ったり来たりしており，どんな自然数nをとっても，第n項x_nと（極限の候補）2 の距離は 2 か 1 のどちらかである．したがって，任意の自然数nに対してそれ以上の自然数をn_0とおくと（n_0も$n_0 \geq n$の範囲で任意に選べばよい），

$$\left|x_{n_0} - 2\right| \left(= |0-2| \text{ or } |1-2|\right) \geq \frac{1}{2}$$

となる．以上で次が言えた：

$$\exists \varepsilon \left(= \frac{1}{2}\right) > 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geq n : \left|x_{n_0} - 2\right| \left(= 2 \text{ or } 1\right) \geq \varepsilon.$$

これは，この数列$\{x_n\}$が 2 に収束しないことを示している．

第 25 講　補論（制約条件付き最適化問題）

ここでは，経済学で頻出する制約条件付き最適化問題とその解について少々考察しておく．

A を ℝ の部分集合，関数 f を A から ℝ への関数とする．このとき，

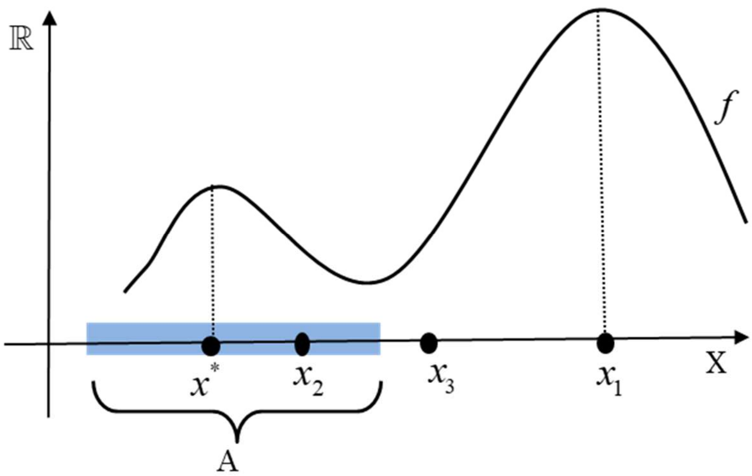
『集合 A の中から要素 x を選択し，関数 f の値をできる限り大きくせよ』

というタイプの問題を**制約条件付き最適化問題**（conditional optimization problem）といい，次のように書く．

$$(*)\quad \boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{x} \ f(x) \\ \text{s.t. } x \in A \end{array}}$$

（ここで，記号 s.t. は，subject to の略であり，『以下の制約の下で』という意味である．s.t.は such that の意味でも用いることは，本編でも説明したとおりであるが，内容を理解しながら読んでいれば混乱することはない．）

関数 f を**目的関数**（objective function），集合 A を**制約集合**（constraint set），条件 $x \in A$ を**制約条件**（constraint condition）と呼ぶ．



実数 x^* が，制約条件付き最適化問題（$*$）の**解**（solution），または**最適解**であるとは，次の 2 条件（の両方）を満たすことである．

（1）$x \in A$,

（2）$\forall x \in A,\ f(x) \leq f(x^*)$.

つまり，解 x^* は，（１）制約条件を満たし，かつ，（２）他のすべての制約条件を満たす要素よりも関数値を（等しいか）大きくする，ということである．（目的関数と制約条件がはっきりと定まって，はじめて最適解も決まりうることに注意しておこう.）

目的がないと，
やるべきこと（最適解）
も決まらない．

制約条件付き最適化問題（＊）の解を明確に定義したので，「解ではない」というのはどういうことかも定まる．実数 x が，制約条件付き最適化問題（＊）の**解ではない**とは，（解であることの否定なので）上の 2 条件のいずれかを満たさないことである．
よって，

（１）′ $x \notin A$，または

（２）′ $\exists x' \in A:\ f\left(x\right) < f\left(x'\right)$

ということである．つまり，（１）′ x は制約条件を満たさないか，または，（２）′ 制約条件を満たす他のある要素 x' が存在し，$f\left(x'\right)$ が $f\left(x\right)$ よりも真に大きくなる．

前ページの図中の x_1 が解ではないのは条件（１）を満たさないからであり，x_2 が解ではないのは条件（２）を満たさないからである．x_3 は（１）と（２）の両方を満たさないので，もちろん解ではない．（第 8 講で指摘したように，否定を知ることで元の命題に関する理解が深まることもある.）

“連続関数”って
わかりにくい….

不連続関数とはどういう
ことか，考えてみよう！

上述の通り，制約条件付き最適化問題は，経済学にゆかりの深い型の問題である．与えられた予算の下でなるべく納得のいく買い物をしたいと考える消費者や，利用可能な技術の下で利益を最大化しようとする企業などを想起すれば，（＊）のような制約条件付き最適化問題が経済学で大きな役割を果たすことが想像できるだろう．

あとがき

本書で紹介した程度の論理操作に慣れておけば，数学や専門分野を本格的に学習する上でさほど不便はないはずである．本書を読み終えた方は，今後は，理論的な数学書や自分が興味を持つ専門科目を勉強しながら，必要に応じて本書を参照すればよいだろう．古典的な数学を勉強する場合，微分積分学と線形代数学が基本的である．それらの書物は世にあまたあるが，参考までに下に二冊ずつ挙げておく（[1]［2]［4]［11])．

論理についてさらに学習したい人もいるかもしれない．その場合，論理学の専門書よりも，まずは以下の参考文献［8]［9]［10]［12]の論理に関する章を読むことを薦める．それで飽き足らない人や論理学の専門家を目指す人が，専門書に進めば十分である．［8]は一般向けに書かれた数学の啓蒙書．受験数学が嫌いな人でも読みやすい．［9]は離散数学，［10]は経済数学，［12]は文系理系を問わず一般向けに書かれた現代数学の入門書である．

本書では集合についても触れたが，集合論の門をくぐったというには程遠い．また，関数の説明も直感的なものにとどまっている．これらについても，その方面の専門書よりは，例えば参考文献［5]［7]［9]［10]［12]の集合に関する章を読めばよいだろう．集合論は現代的な数学の出発点である．現代数学の入門書としては，[3]［5]［6]［7]［9]などがある．

参考文献

［1] 川久保勝夫『線形代数学』（日本評論社）
［2] 斎藤正彦『はじめての微積分（上下)』（朝倉書店）
［3] 斎藤正彦『はじめての群論』（日本評論社）
［4] 高橋渉『微分積分学』（横浜図書）
［5] 高橋渉『距離空間と位相空間』（横浜図書）
［6] 高橋渉『非線形・凸解析学入門』（横浜図書）
［7] 遠山啓『無限と連続』（岩波新書）
［8] 遠山啓『新数学勉強法』（講談社ブルーバックス）
［9] 延原肇『離散数学』（共立出版）
［10] 西村和雄『経済数学早わかり』（日本評論社）
［11] 平口良司『経済学のための線形代数』（朝倉書店）
［12] 矢野健太郎『教養の数学』（裳華房）