共分散の計算例と基本的な性質

分散と分散公式

$$V[X] = E[(X-E[X])^2]$$
$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

共分散と共分散公式

$$Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

分散と共分散の関係

$$V[aX+bY]$$
$$= a^2V[X] + 2ab\,Cov[X,Y] + b^2V[Y]$$

分散の求め方

Step 1. 周辺確率(密度)関数を求める。

Step 2. $E[X]$, $E[X^2]$ を求める。

Step 3. $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ で計算する。

共分散の求め方

Step 1. 周辺確率(密度)関数を求める。

Step 2. $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ を求める。

Step 3. $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ で計算する。

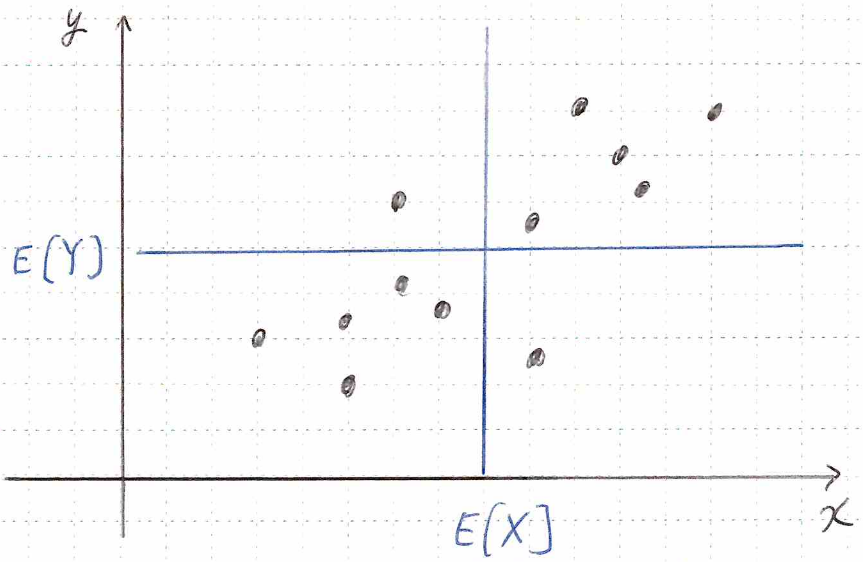
共分散

$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

ここで、XとYは確率変数、つまり確率的に
変動する数である。

Xがその期待値$E[X]$よりも大きいとき、
Yもその期待値$E[Y]$よりも大きい傾向があるなら、
両者の共分散$Cov[X,Y]$は正になる。

Xがその期待値$E[X]$よりも大きいとき、
Yもその期待値$E[Y]$よりも小さい傾向があるなら、
両者の共分散$Cov[X,Y]$は負になる。



この図のような場合には $Cov[X,Y] > 0$.

ex

同時確率分布

X \ Y	0	1	2
0	1/8	1/8	0
1	1/8	2/8	1/8
2	0	1/8	1/8

$\boxed{V[X],\ V[Y],\ Cov[X, Y] \text{ を求めよ。}}$

分散　　共分散

Step 1. 周辺確率関数

$f_X(x)\ (= P(X=x))$, $f_Y(y)\ (= P(Y=y))$ を求める。

X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	1/8	1/8	0	2/8
1	1/8	2/8	1/8	4/8
2	0	1/8	1/8	2/8
$f_Y(y)$	2/8	4/8	2/8	1

Step 2. $E[X], E[Y], E[X^2], E[Y^2], E[XY]$ を求める。

$$E[X] = \frac{2}{8}\cdot 0 + \frac{4}{8}\cdot 1 + \frac{2}{8}\cdot 2 = 1$$

$$E[Y] = \frac{2}{8}\cdot 0 + \frac{4}{8}\cdot 1 + \frac{2}{8}\cdot 2 = 1$$

$$E[X^2] = \frac{2}{8}\cdot 0^2 + \frac{4}{8}\cdot 1^2 + \frac{2}{8}\cdot 2^2 = \frac{3}{2}$$

$$E[Y^2] = \frac{2}{8}\cdot 0^2 + \frac{4}{8}\cdot 1^2 + \frac{2}{8}\cdot 2^2 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \frac{1}{8}\cdot 0\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 2 \\ &\quad + \frac{1}{8}\cdot 1\cdot 0 + \frac{2}{8}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 1\cdot 2 \\ &\quad + 0\cdot 2\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot 2\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2\cdot 2 \\ &= \frac{1}{8}(0+2+2+2+4) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Step.3 $V[X], V[Y], Cov[X, Y]$ を求める。

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{5}{4} - 1\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

※ $V[X]$ を求めるだけなら，勿論，$E[X]$ と $E[X^2]$ だけわかればよい。

$Cov[X, Y]$ 〃 $E[X], E[Y], E[XY]$ 〃

例.

r.v. X, Y の同時確率密度関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{if } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

check

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} (x+y)\,dx\,dy \\
&= \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{1} (x+y)\,dy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{1} dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(x + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

//

$\boxed{V[X],\ V[Y],\ Cov[X,Y] \text{ を求めよ。}}$

Step 1. $f_X(x)$, $f_Y(y)$ を求める。

Step. 2 $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$, $E[Y^2]$, $E[XY]$ を求める.

Step. 3. $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ を求める。

Step 1. $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{1} (x+y)\,dy$$

$$= \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad \text{for } x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2} \quad \text{for } y \in [0,1]$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{if } y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}}$$

Step 2. $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$, $E[Y^2]$, $E[XY]$

$$E[X] = \int_{x=-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

定義は $E[X] = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy$ だが、周辺密度関数 $f_X(x)$ を使うことでやや簡単になっている。

$$= \int_{x=0}^{1} x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$E[Y] = \frac{7}{12}$$

$$E[X^2] = \int_{x=-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left(x^3+\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \underline{\frac{5}{12}}$$

$$E[Y^2] = \underline{\frac{5}{12}}$$

$$E(XY) = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} xy\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} xy(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(x^2y+xy^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{1}(x^2y+xy^2)\,dy\right]dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}xy^3\right]_{y=0}^{1}dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^2\right]_{x=0}^{1}$$

$$= \underline{\frac{1}{3}}$$

Step 3. $V[X]$, $V[Y]$, $Cov[X, Y]$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$
$$= \frac{5}{12} - \frac{49}{144}$$
$$= \frac{1}{144}(60 - 49) = \underline{\frac{11}{144}}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$
$$= \underline{\frac{11}{144}}$$

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}$$
$$= \frac{1}{144}(48 - 49)$$
$$= \underline{-\frac{1}{144}}$$

Thm (共分散の基本性質)

(I) $\mathrm{Cov}[X, X] \geqq 0$

(II) $\mathrm{Cov}[X+Y, Z] = \mathrm{Cov}[X, Z] + \mathrm{Cov}[Y, Z]$

(III) $\mathrm{Cov}[\alpha X, Y] = \alpha \mathrm{Cov}[X, Y]$

(IV) $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$

Proof.

(I) $\mathrm{Cov}[X, X] = V[X]$

$$= E[(X - E[X])^2] \geqq 0. \quad \lrcorner$$

(II) $\mathrm{Cov}[X+Y, Z]$

$$= E[(X+Y)Z] - E[X+Y]E[Z]$$

$$= E[XZ + YZ] - (E[X] + E[Y])E[Z]$$

$$= E[XZ] + E[YZ] - (E[X]E[Z] + E[Y]E[Z])$$

$$= E[XZ] - E[X]E[Z] + E[YZ] - E[Y]E[Z]$$

$$= \mathrm{Cov}[X, Z] + \mathrm{Cov}[Y, Z]. \quad \lrcorner$$

(III) $Cov[\alpha X, Y]$

$$= E[(\alpha X)Y] - E[\alpha X]E[Y]$$

$$= \alpha E[XY] - \alpha E[X]E[Y]$$

$$= \alpha (E[XY] - E[X]E[Y])$$

$$= \alpha Cov[X, Y].$$

(IV) $Cov[X, Y]$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$= E[YX] - E[Y]E[X]$$

$$= Cov[Y, X].$$

//

※ (II) と (III) は. 共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ の
第1変数についての線型性である。

つまり, X, Y, Z : r.v., $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ について

$$\mathrm{Cov}[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha\,\mathrm{Cov}[X, Z] + \beta\,\mathrm{Cov}[Y, Z]$$

がいえる。
次ページにより 第2変数についても線型性
はいえる。

※ $\begin{pmatrix} V[X] & \mathrm{Cov}[X, Y] \\ \mathrm{Cov}[Y, X] & V(Y) \end{pmatrix}$

を分散・共分散行列というが,
(IV) により, この行列は対称行列になる。

Cor

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(1)\ \mathrm{Cov}[X, Y+Z] = \mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{Cov}[X, Z] \\
&(2)\ \mathrm{Cov}[X, \alpha Y] = \alpha\,\mathrm{Cov}[X, Y]
\end{aligned}
}
$$

Proof.

(1)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X, Y+Z]
&\overset{(\mathrm{IV})}{=} \mathrm{Cov}[Y+Z, X] \\
&\overset{(\mathrm{II})}{=} \mathrm{Cov}[Y, X] + \mathrm{Cov}[Z, X] \\
&\overset{(\mathrm{IV})}{=} \mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{Cov}[X, Z].
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X, \alpha Y]
&\overset{(\mathrm{IV})}{=} \mathrm{Cov}[\alpha Y, X] \\
&\overset{(\mathrm{III})}{=} \alpha\,\mathrm{Cov}[Y, X] \\
&\overset{(\mathrm{IV})}{=} \alpha\,\mathrm{Cov}[X, Y].
\end{aligned}
$$

//

Cor

$$
\boxed{\mathrm{Cov}[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta\,\mathrm{Cov}[X, Y]}
$$

X; r.v.
$\alpha \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \mathrm{Cov}[X, \alpha] = 0$

<u>Proof.</u>

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}[X, \alpha] \\
&= E\big[(X - E[X]) \cdot (\alpha - E[\alpha])\big] \\
&= E\big[(X - E[X]) \cdot (\alpha - \alpha)\big] \\
&= E[0] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

//

X, Y, Z, W : r.v.
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}[aX+bY, cZ+dW]$$
$$= ac\,\mathrm{Cov}[X,Z] + ad\,\mathrm{Cov}[X,W]$$
$$+ bc\,\mathrm{Cov}[Y,Z] + bd\,\mathrm{Cov}[Y,W]$$

<u>Proof</u>

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \mathrm{Cov}[aX+bY, cZ+dW] \\
&= \mathrm{Cov}[aX, cZ+dW] + \mathrm{Cov}[bY, cZ+dW] \\
&= \mathrm{Cov}[aX, cZ] + \mathrm{Cov}[aX, dW] \\
&\quad + \mathrm{Cov}[bY, cZ] + \mathrm{Cov}[bY, dW] \\
&= ac\,\mathrm{Cov}[X,Z] + ad\,\mathrm{Cov}[X,W] \\
&\quad + bc\,\mathrm{Cov}[Y,Z] + bd\,\mathrm{Cov}[Y,W].
\end{aligned}$$

//

$\downarrow$ $Y = W = 1$: constant

X, Z : r.v.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}[aX+b, cZ+d] = ac\,\mathrm{Cov}[X, Z]$

Proof

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}[aX+b, cZ+d] \\
&= ac\,\mathrm{Cov}[X, Z] + ad\,\mathrm{Cov}[X, 1] \\
&\quad + bc\,\mathrm{Cov}[1, Z] + bd\,\mathrm{Cov}[1, 1] \\
&= ac\,\mathrm{Cov}[X, Z].
\end{aligned}
$$

//

$\downarrow$

さらに Special Case

- $a = c = 1$

$$\mathrm{Cov}[X+\alpha, Y+\beta] = \mathrm{Cov}[X, Y]$$

r.v. を定数だけズラしても、共分散は影響を受けない。

X, Y, Z : r.v.
$a, b, c \in \mathbb{R}$: const.

$$\Rightarrow V[aX+bY+cZ] = a^2V[X]+b^2V[Y]+c^2V[Z] + 2ab\,Cov[X,Y]+2bc\,Cov[Y,Z] + 2ca\,Cov[Z,X]$$

<u>Proof</u>

$$\begin{aligned} LHS &= V[aX+(bY+cZ)] \\ &= a^2V[X]+2a\,Cov[X, bY+cZ]+V[bY+cZ] \\ &= a^2V[X]+2a\left(b\,Cov[X,Y]+c\,Cov[X,Z]\right) \\ &\quad + b^2V[Y]+2bc\,Cov[Y,Z]+c^2V[Z] \\ &= a^2V[X]+b^2V[Y]+c^2V[Z] \\ &\quad +2ab\,Cov[X,Y]+2bc\,Cov[Y,Z] \\ &\quad +2ca\,Cov[Z,X]. \end{aligned}$$

//

$$V[\alpha A+\beta B] = \alpha^2V[A]+2\alpha\beta\,Cov[A,B]+\beta^2V[B]$$

where $\begin{cases} A, B : \text{r.v.} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

これを使っている。

共分散の計算例と基本的な性質

問題1. X, Yの二次元確率分布が下表のようになるとする。

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	0	1/10	2/10	
2	1/10	2/10	4/10	

次の問いに答えよ。

(1) X, Yの周辺確率分布を求めよ。
(2) Xの期待値と分散を求めよ。
(3) Yの期待値と分散を求めよ。
(4) XとYの共分散を求めよ。

問題2. X, Yの二次元確率分布が下表のようになるとする。

$X \backslash Y$	2	1	−1	−2	
1	1/4	0	0	1/4	
−1	0	1/4	1/4	0	

次の問いに答えよ。

(1) X, Yの周辺確率分布を求めよ。
(2) Xの期待値と分散を求めよ。
(3) Yの期待値と分散を求めよ。
(4) XとYの共分散を求めよ。

問題3. 連続確率変数X, Yの同時確率密度関数が、次のように与えられるとする。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x + 3y^2) & \text{if } x, y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の点はすでに確認済みである。

- $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$
- $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2} & \text{if } y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

このとき、$V[X], V[Y], Cov[X, Y]$を求めなさい。

問題4.（共分散の基本性質）
以下の共分散の性質を証明しなさい。
(1) $Cov[X,X] \geq 0$
(2) $Cov[X+Y,\ Z] = Cov[X,Z] + Cov[Y,Z]$
(3) $Cov[\alpha X,\ Y] = \alpha \cdot Cov[X,Y]$
(4) $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$

問題5. 次を証明しなさい。その際に、問題1の結果をどのように使っているか、確認しなさい。
(1) $Cov[X,\ Y+Z] = Cov[X,Y] + Cov[X,Z]$
(2) $Cov[X,\ \alpha Y] = \alpha \cdot Cov[X,Y]$

問題6. 次を証明しなさい。

$$\begin{aligned} &Cov[aX+bY,\ cZ+dW] \\ &\quad = acCov[X,Z] + adCov[X,W] + bcCov[Y,Z] + bdCov[Y,W] \end{aligned}$$

問題7. 問題6の結果を使わずに以下を証明しなさい。

$$Cov[aX+b,\ cZ+d] = acCov[X,Z]$$

問題8. X, Y, Zを確率変数、a, b, cを定数とする。このとき、

$$\begin{aligned} V[aX+bY+cZ] &= a^2V[X] + b^2V[Y] + c^2V[Z] \\ &\quad + 2abCov[X,Y] + 2bcCov[Y,Z] + 2caCov[Z,X] \end{aligned}$$

を示しなさい。

問題1. X, Yの二次元確率分布が下表のようになるとする。

$X\backslash Y$	1	2	3	
1	0	1/10	2/10	
2	1/10	2/10	4/10	

次の問いに答えよ。

(1) X, Yの周辺確率分布を求めよ。
(2) Xの期待値と分散を求めよ。
(3) Yの期待値と分散を求めよ。
(4) XとYの共分散を求めよ。

解答
問題1.
(1) 下表のとおり。

$X\backslash Y$	1	2	3	$f_X(x)$
1	0	1/10	2/10	**3/10**
2	1/10	2/10	4/10	**7/10**
$f_Y(y)$	**1/10**	**3/10**	**6/10**	

(2)

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{7}{10}\cdot 2 = \underline{\frac{17}{10}} \\
V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \frac{3}{10}\cdot 1^2 + \frac{7}{10}\cdot 2^2 - \left(\frac{17}{10}\right)^2 \\
&= \frac{31}{10} - \frac{289}{100} = \underline{\frac{21}{100}}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \frac{1}{10}\cdot 1 + \frac{3}{10}\cdot 2 + \frac{6}{10}\cdot 3 = \underline{\frac{25}{10}} \\
V[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\
&= \frac{1}{10}\cdot 1^2 + \frac{3}{10}\cdot 2^2 + \frac{6}{10}\cdot 3^2 - \left(\frac{25}{10}\right)^2 \\
&= \frac{67}{10} - \frac{625}{100} = \underline{\frac{45}{100}}
\end{aligned}
$$

(4) まず、$E[XY]$を求める。

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= 0\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{10}\cdot 1\cdot 2 + \frac{2}{10}\cdot 1\cdot 3 \\
&\quad + \frac{1}{10}\cdot 2\cdot 1 + \frac{2}{10}\cdot 2\cdot 2 + \frac{4}{10}\cdot 2\cdot 3 \\
&= \frac{42}{10}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= \frac{42}{10} - \frac{17}{10}\frac{25}{10} \\
&= -\frac{5}{100}
\end{aligned}
$$

問題2. X, Yの二次元確率分布が下表のようになるとする。

$X \backslash Y$	2	1	−1	−2	
1	1/4	0	0	1/4	
−1	0	1/4	1/4	0	

次の問いに答えよ。

(1) X, Yの周辺確率分布を求めよ。
(2) Xの期待値と分散を求めよ。
(3) Yの期待値と分散を求めよ。
(4) XとYの共分散を求めよ。

解答
問題2.
(1) 下表のとおり。

$X \backslash Y$	2	1	−1	−2	$f_X(x)$
1	1/4	0	0	1/4	**1/2**
−1	0	1/4	1/4	0	**1/2**
$f_Y(y)$	**1/4**	**1/4**	**1/4**	**1/4**	

(2)

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) \\ &= \underline{0} \\ V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - 0^2 \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} E[Y] &= \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot(-2) \\ &= \underline{0} \\ V[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot(-1)^2 + \frac{1}{4}\cdot(-2)^2 - 0^2 \\ &= \frac{10}{4} = \underline{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

(4) まず、$E[XY]$を求める。

$$\begin{aligned} E[XY] &= \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot(-2) + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

問題3. 連続確率変数X, Yの同時確率密度関数が、次のように与えられるとする。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+3y^2) & \text{if } x,y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の点はすでに確認済みである。

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$\cdot f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2} & \text{if } y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき、$V[X], V[Y], Cov[X,Y]$を求めなさい。

解答

問題3.

まず、$E[X], E[Y]$を求める。

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y\left(\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)dy$$
$$= \int_0^1\left(\frac{3}{2}y^3+\frac{1}{2}y\right)dy = \left[\frac{3}{8}y^4+\frac{1}{4}y^2\right]_0^1 = \frac{5}{8}$$

次に、$E[X^2], E[Y^2], E[XY]$を求める。

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^1\left(x^3+\frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2f_Y(y)dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)dy$$
$$= \int_0^1\left(\frac{3}{2}y^4+\frac{1}{2}y^2\right)dy = \left[\frac{3}{10}y^5+\frac{1}{6}y^3\right]_0^1 = \frac{7}{15}$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)dxdy$$
$$= \int_0^1\int_0^1\left(x^2y+\frac{3}{2}xy^3\right)dxdy = \int_{x=0}^1\left[\int_{y=0}^1\left(x^2y+\frac{3}{2}xy^3\right)dy\right]dx$$
$$= \int_{x=0}^1\left[\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{3}{8}xy^4\right]_{y=0}^1 dx = \int_{x=0}^1\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{16}x^2\right]_0^1 = \frac{17}{48}$$

これらを用いると、

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$
$$= \frac{60}{144} - \frac{49}{144} = \underline{\frac{11}{144}}$$
$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{7}{15} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \underline{\frac{73}{960}}$$
$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$
$$= \frac{17}{48} - \frac{7}{12}\frac{5}{8} = \underline{-\frac{1}{96}}$$

と計算できる。

おまけ

例（株式保有）

	暖冬	平年並み	厳冬	$E[\cdot]$	$V[\cdot]$
スキー会社 X	-4	10	21	9	$314/3$
ビール会社 Y	9	7	5	7	$8/3$
アパレル会社 Z	6	7	8	7	$2/3$

ビール会社の株は、アパレル会社の株と比べて、存在意義がないように思える。期待値は同じで分散が大きいため。

・暖冬，平年並み，厳冬の確率は全て $1/3$.

(1) 3つの会社の株価の期待値 $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$ を求める。

$$E[X]=\frac{1}{3}(-4+10+21)=\underline{9}$$

$$E[Y]=\frac{1}{3}(9+7+5)=\underline{7}$$

$$E[Z]=\frac{1}{3}(6+7+8)=\underline{7}$$

(2) $V[X]$, $V[Y]$, $V[Z]$ を求める.

$$E[X^2]=\frac{1}{3}\left((-4)^2+10^2+21^2\right)=\frac{557}{3}$$

$$E[Y^2]=\frac{1}{3}(9^2+7^2+5^2)=\frac{155}{3}$$

$$E[Z^2]=\frac{1}{3}(6^2+7^2+8^2)=\frac{149}{3}$$

$$\therefore V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\underline{\frac{314}{3}}$$

$$V[Y]=E[Y^2]-(E[Y])^2=\underline{8/3}$$

$$V[Z]=E[Z^2]-(E[Z])^2=\underline{2/3}$$

(3) $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を求める。

同時確率関数は下表に示される通り。

$X \backslash Y$	9	7	5	計
-4	$1/3$	0	0	$1/3$
10	0	$1/3$	0	$1/3$
21	0	0	$1/3$	$1/3$
計	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \frac{1}{3}\left((-4)\cdot 9 + 10\cdot 7 + 21\cdot 5\right) \\
&= \frac{1}{3}(-36 + 70 + 105) \\
&= \frac{139}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{Cov}[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= \frac{139}{3} - 9\cdot 7 \\
&= \underline{-\frac{50}{3}}
\end{aligned}
$$

※スキー会社とビール会社の株価は、暖冬か厳冬かで逆に動くことを反映して Cov はマイナスになる。

(4) スキー会社の株 1/5，ビール会社の株 4/5 の
ポートフォリオを組む。
$$W = \frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y$$
このポートフォリオの期待値 $E[W]$ と分散 $V[W]$ を求める。

$$E[W] = E\left[\frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y\right]$$
$$= \frac{1}{5}E[X] + \frac{4}{5}E[Y]$$
$$= \frac{1}{5}\cdot 9 + \frac{4}{5}\cdot 7$$
$$= \underline{\frac{37}{5}} = \underline{7.4}$$

$$E[W^2] = E\left[\left(\frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y\right)^2\right]$$
$$= E\left[\frac{1}{25}X^2 + \frac{8}{25}XY + \frac{16}{25}Y^2\right]$$
$$= \frac{1}{25}E[X^2] + \frac{8}{25}E[XY] + \frac{16}{25}E[Y^2]$$
$$= \frac{1}{25}\cdot\frac{557}{3} + \frac{8}{25}\,\frac{139}{3} + \frac{16}{25}\,\frac{155}{3}$$
$$= \frac{4149}{75} = \frac{1383}{25}$$

$$V[W] = E[W^2] - (E[W])^2$$
$$= \frac{1383}{25} - \frac{37^2}{25}$$
$$= \underline{\frac{14}{25}}$$

別解

$$V[W] = V\left[\frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y\right]$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^2 V[X] + 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}Cov[X,Y] + \left(\frac{4}{5}\right)^2 V[Y]$$

$$= \frac{1}{25}\,\frac{314}{3} + \frac{8}{25}\left(-\frac{50}{3}\right) + \frac{16}{25}\,\frac{8}{3}$$

$$= \frac{42}{75} = \frac{14}{25}$$

	$E[\cdot]$	$V[\cdot]$
スキー会社 X	9	$314/3$
ビール会社 Y	7	$8/3 = 2.66\cdots$
アパレル会社 Z	7	$2/3 = 0.66\cdots$
ポートフォリオ W $\left(W = \frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y\right)$	7.4	$14/25 = 0.56$

- YはZと比較して存在意義がないように思えたが、
  Xと組み合わせてポートフォリオを組むことにより
  W
  $E[\cdot]$でも$V[\cdot]$でもZを凌駕できる。

- XとYは逆方向に動くところがポイント
  $Cov[X,Y] < 0$

おまけ

問題. スキー用品会社、ビール会社、アパレル会社の株式保有の例で$Cov[Y,Z]$と$Cov[Z,X]$についても調べる。

(1) 実際に計算する前に、$Cov[Y,Z]$と$Cov[Z,X]$が正になるか負になるか、また$Cov[X,Y]$と比較してどれぐらいの大きさ(絶対値水準)になるかを予想してみなさい。

(2) 実際に$Cov[Y,Z]$と$Cov[Z,X]$を計算して、(1)での予想が正しかったか確認しなさい。

問題.

(1) 省略

(2) まず、本文中で求めたとおり、$E[X] = 9,\ E[Y] = E[Z] = 7$であったことを確認しておく。次に、$Cov[Y,Z]$を求めるために、確率変数$Y,Z$の同時確率関数を下表に示す。

Y\Z	6	7	8	計
9	1/3	0	0	1/3
7	0	1/3	0	1/3
5	0	0	1/3	1/3
計	1/3	1/3	1/3	1

よって、

$$E[YZ] = \frac{1}{3}(9 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 8) = \frac{143}{3}$$

と計算できる。したがって、

$$\begin{aligned} Cov[Y,Z] &= E[YZ] - E[Y]E[Z] \\ &= \frac{143}{3} - 49 = \underline{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

となる。

同様に、確率変数Z,Xの同時確率関数は、

Z\X	−4	10	21	計
6	1/3	0	0	1/3
7	0	1/3	0	1/3
8	0	0	1/3	1/3
計	1/3	1/3	1/3	1

よって、

$$E[ZX] = \frac{1}{3}(6 \cdot (-4) + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 21) = \frac{214}{3}$$

と計算できる。したがって、

$$\begin{aligned} Cov[Z,X] &= E[ZX] - E[Z]E[X] \\ &= \frac{214}{3} - 63 = \underline{\frac{25}{3}} \end{aligned}$$

となる。