標本空間と確率

(1) 用語の準備

(2) 確率の性質

(3) 応用例

• S (キp)　<u>sample space</u>　<u>標本空間</u>

起こりうる結果の集合

<u>ex.</u> サイコロ投げ

$$S = \{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ \}$$

• $E \subset S$　<u>事象</u> <u>(event)</u>　Sの部分集合のこと。

<u>ex.</u>

$E_1 = \{\boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{5}\}$ 奇数目が出ることを表す事象

$E_2 = \{\boxed{2}, \boxed{4}, \boxed{6}\}$ 偶数目　〃　〃

$E_3 = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}\}$ 3以下の目が出るという事象

1つの要素しか持たない事象 = <u>根本事象</u>

<u>ex.</u> $A_1 = \{\boxed{1}\}, A_2 = \{\boxed{2}\}, \cdots, A_6 = \{\boxed{6}\}$

• <u>全事象</u> = 標本空間そのもの

$S \subset S$ なので S 自体も事象.

<u>ex.</u> $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6$

「$\boxed{1}$が出る」または「$\boxed{2}$が出る」または …

… または「$\boxed{6}$が出る」という事象.

- $A \subset \Omega$ 事象.

  $A^c \ (= \Omega \setminus A)$ Aの排反事象（余事象）

  ex. $A = \{\boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{5}\}$

  $A^c = \{\boxed{2}, \boxed{4}, \boxed{6}\}$

- $A, B \subset \Omega$

  $A \cap B$ 積事象

  ex. $A = \{\boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{5}\}$ 奇数目が出るという事象

  $B = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}\}$ 4以下の目 〃

  $A \cap B = \{\boxed{1}, \boxed{3}\}$ 「4以下の奇数が出る」という事象

- 和事象

  $A \cup B$

  ex. $A \cup B = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}\}$

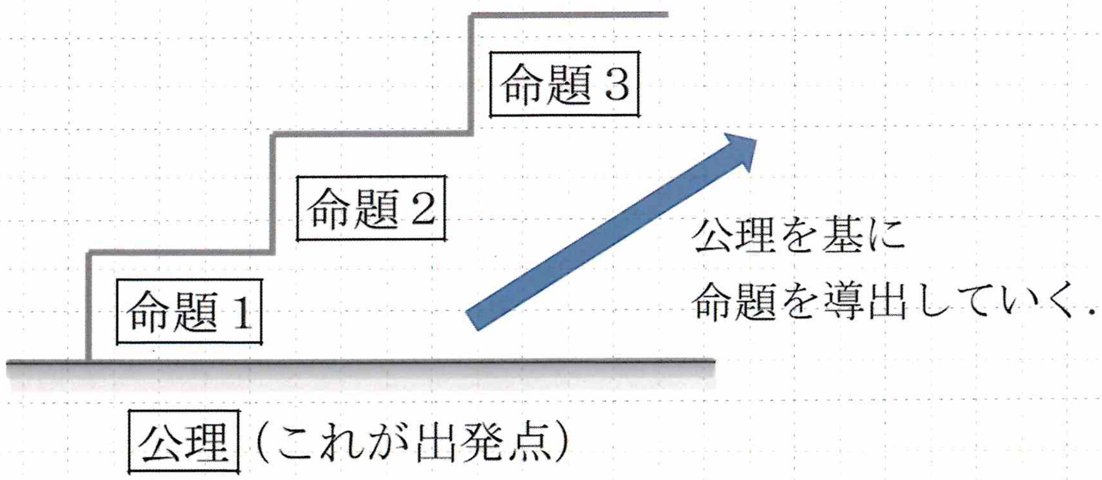
  「4以下かまたは奇数の目が出る」

  という事象

集合論	確率論
全体集合	標本空間
部分集合	事象
要素が一つの部分集合	根本事象
全体集合	全事象
補集合	排反事象、余事象
共通部分	積事象
合併集合	和事象

公理(axiom)

理論の出発点として証明抜きで正しいと認める事柄。



すべてを証明しつくすことはできないので、最初に公理を設定し、それを用いて定理（命題）を導出していく。

そうして理論体系が構築される。

確率 (probability) とは

$S \neq \phi$　標本空間

$E \subset S$

$$\begin{array}{ccc} E & \longmapsto & P(E) \\ \cap & & \cap \\ S & & \mathbb{R} \end{array}$$

事象 E に対して実数 $P(E)$ を対応させる関数で次の三条件をみたすもの。

〈確率の公理〉

(P1) $^\forall E \subset S,\quad P(E) \in [0, 1]$

(P2) $P(S) = 1$

(P3) $^\forall A, B \subset S,$

$$A \cap B = \phi \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

※実は

(P1)′ $P(E) \geqq 0$

で十分。

$P(E) \leqq 1$ は証明できる。

Note

(P1) より $P(A) \in [0, 1]$ なので

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A) > 0 \\ &\iff P(A) \neq 0 \end{aligned}}$$

である。

($\Rightarrow$) 自明

($\Leftarrow$) 背理法の仮定として

$$P(A) \leqq 0$$

と仮定する。

前提 $P(A) \neq 0$ より

$$P(A) < 0$$

がいえる。

これは $P(A) \in [0, 1]$ に矛盾する。

//

Th

$$A \subset S \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

Proof

(P2)

$$\begin{aligned} 1 &= P(S) \\ &= P(A \cup A^c) \\ &= P(A) + P(A^c) \end{aligned}$$

$A \cap A^c = \phi$

(P3)

$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$.

//

Th

$$\boxed{P(\phi) = 0}$$

Proof.

$$\begin{aligned}P(\phi) &= P(S^c) && \text{前の定理}\\ &= 1 - P(S) && (P2)\\ &= 1 - 1\\ &= 0.\end{aligned}$$

//

この定理は

$$\boxed{A = \phi \Longrightarrow P(A) = 0}$$

と書き直すこともできる。

対偶をとって

$$\boxed{P(A) \neq 0 \Longrightarrow A \neq \phi}$$

$$\boxed{P(A) > 0 \Longrightarrow A \neq \phi}$$

も言えたことになる。

ただし、逆は言えない！

$$A \neq \phi \not\Longrightarrow P(A) > 0$$

つまり、Aが空集合でなくても $P(A) = 0$ となることもある。

Th

$A, B \subset S$

$\Rightarrow$ ① $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

② $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Proof

① First, we will verify that

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c). \quad \text{— } (*)$$

$$RHS = A \cap (B \cup B^c)$$
$$= A \cap S = A = LHS.$$

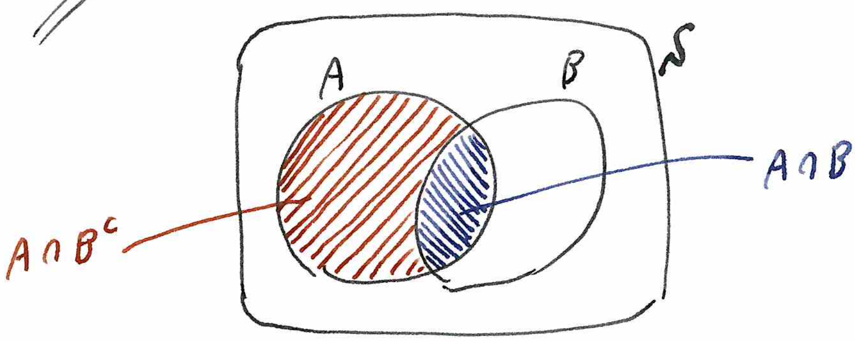
Since $A \cap B$ and $A \cap B^c$ are mutually exclusive, we have from (P3) that

$$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \quad \leftarrow (*)$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \quad (P3)$$

$$\therefore P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

② : OK.

//



Th

$A, B \subset S$

$A \subset B$

$\Rightarrow P(A) \leqq P(B)$

← 集合の大小(包含)関係

← 実数の大小関係

Proof.

Since $A \subset B$, it holds that

$$B = A \cup (A^c \cap B). \quad \text{— } (*)$$

A and $A^c \cap B$ are mutually exclusive. — $(**)$

Thus,

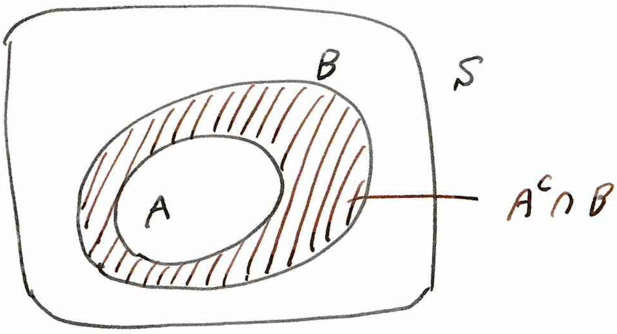
$$P(B) \overset{(*)}{=} P\left(A \cup (A^c \cap B)\right)$$

$(**), (P3)$

$$= P(A) + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{\geqq 0 \ (P1)}$$

$$\geqq P(A).$$

//



※ (P3)を使うために B を互いに排反な2つの集合 (A と $A^c \cap B$) に分割しているところがポイント！

Th

$$P(A)=0 \text{ or } P(B)=0$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=0$$

Proof.

(i) Assume that $P(A)=0$.

It holds that

$$\underset{\underset{(P1)}{\uparrow}}{0\leqq} P(A\cap B) \underset{\underset{A\cap B\subset A}{\uparrow}}{\leqq} P(A)=0 .$$

$\therefore P(A\cap B)=0.$ ┘

(ii) Assume that $P(B)=0$.

In much the same way, we can obtain the desired result.

//

Th

$A, B, C \subset S$ mutually exclusive

i.e $A \cap B = \phi$, $B \cap C = \phi$, $C \cap A = \phi$

$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Proof

It is clear that

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)). \quad \text{— } (*)$$

Note that $\underline{A \cap (B \cup C) = \phi.}$ — (**)

Indeed, $A \cap (B \cup C)$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$= \phi \cup \phi$$
$$= \phi. \quad \lrcorner$$

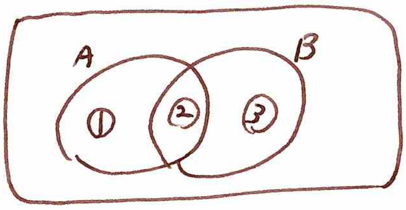
From (*),

$$\begin{aligned} & P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A \cup (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B \cup C) \quad (**)\ (P3) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \quad (P3) \end{aligned}$$

//

Review

① $\cdot\ A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$



② $\cdot\ A \cap B^c,\ A \cap B,\ A^c \cap B$: disjoint

③ $\cdot\ P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

④ $\cdot\ P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

⑤ $\cdot\ A, B, C$: disjoint

$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Th (加法定理)

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Proof

We have that

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &\overset{①}{=} P\big((A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)\big) \quad ②\ ⑤ \\
&= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \quad ③\ ④ \\
&= \big(P(A) - P(A \cap B)\big) + P(A \cap B) \\
&\qquad + \big(P(B) - P(A \cap B)\big) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B).
\end{aligned}
$$

//

※ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Th

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B\cup C)\\
&\quad = P(A)+P(B)+P(C)\\
&\qquad -P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)\\
&\qquad\qquad +P(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

Proof.

It holds that

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B\cup C)\\
&\quad = P(A\cup(B\cup C))\\
&\quad = P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))
\end{aligned}
$$

加法定理 $\quad = P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P((A\cap B)\cup(A\cap C))$

〃 $\quad = P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)$

$$
\qquad -\left[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P\left(\underbrace{(A\cap B)\cap(A\cap C)}_{=A\cap B\cap C}\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad = P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)\\
&\qquad -P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C).
\end{aligned}
$$

//

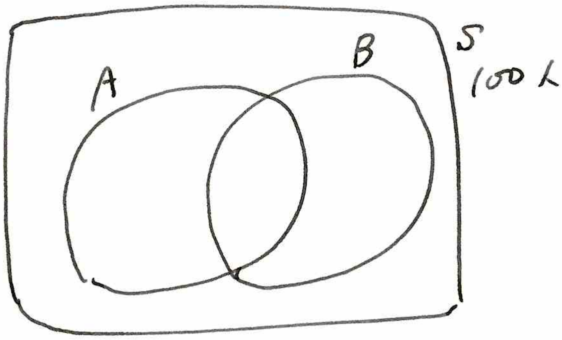
例.

S：何かを買った人　100人

A：プリンを 〃　40人

B：シュークリーム 〃　10人

A∩B：どちらも購入　5人



$$P(A) = \frac{4}{10}$$

$$P(B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{100}$$

プリン or シュークリームを購入した人の人数は？

解答1

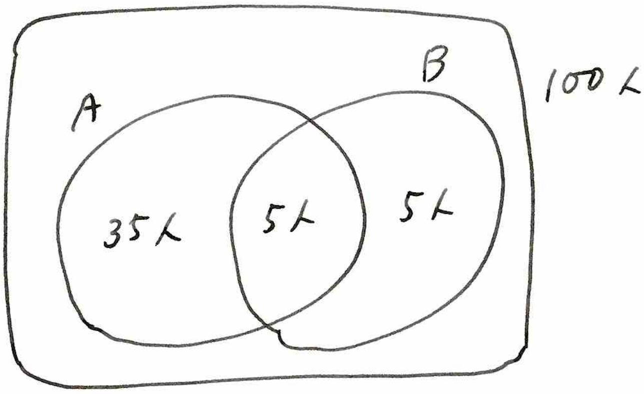
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{1}{10} - \frac{5}{100}$$

$$= \frac{45}{100}$$

45人

解答2



$$P(A\cup B) = P(A\cap B^c) + P(A\cap B) + P(A^c\cap B)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{5}{100} + \frac{5}{100}$$

$$= \frac{45}{100}$$

45人

※ $A\cup B$ を互いに排反な3つの部分集合

$A^c\cap B$, $A\cap B$, $A\cap B^c$

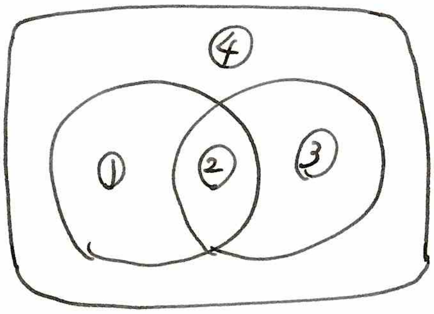
に分割して考える。

Remark

2種類の分類基準がある場合、

(・パンを買った or not
・ジュースを買った or not
など)

全体は4つの領域に分けられる。



ゆえに 互いに無関係な3つの情報が得られれば

各領域の割合いは決まる。

※ 例えば

$A \cap B$ と $(A^c \cup B^c)^c$ は同じことなので

無関係な情報ではない。

$P(A)$ と $P(B)$ は比較的集まりやすい情報だろうから、

後は、 $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$

などの情報が得られればよい。

例.

$P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$ を既知とする。

このとき、以下の情報も得られる。

① $P(A\cap B)$

加法定理

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

より、

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

として $P(A\cap B)$ を求めることができる。

② $P(A^c\cup B^c)$

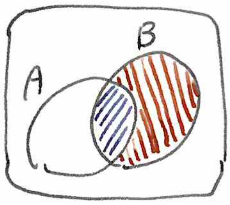
$$P(A^c\cup B^c)\overset{\text{ド・モルガン}}{=}P\left((A\cap B)^c\right)$$

$$=1-P(A\cap B)$$

と変形でき、①より $P(A\cap B)$ もわかるので

$P(A^c\cup B^c)$ を求めることができる。

③ $P(A^c\cap B)$



$A\cap B$ と $A^c\cap B$ は B の分割なので、

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B).$$

よって、$P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$ となる。

①より $P(A\cap B)$ もわかるので、

$P(A^c\cap B)$ を求めることができる。

※他にも色々求められる。

例.

S : 何かを買った人　100人

A : パンを 〃　60人

B : ジュースを 〃　70人

$A \cup B$: どちらかを 〃　80人

(1) パンとジュースの両方を買った人は何人か？
$P(A \cap B) = ?$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ より　←加法定理

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= \frac{60}{100} + \frac{70}{100} - \frac{80}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

∴ 50人

(2) パンとジュースのどちらも買わなかった人は何人か？
$P(A^c \cap B^c) = ?$

$$P(A^c \cap B^c)$$
$$= P\left((A \cup B)^c\right)$$ ドモルガン
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \frac{80}{100} = \frac{20}{100}$$

20人

(3) パンとジュースのどちらかでも買わなかった人は何人か？　$P(A^c \cup B^c) = ?$

$$P(A^c \cup B^c)$$
$$= P((A \cap B)^c)$$
$$= 1 - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{2}$$

ド・モルガン

50人

別解

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$
$$= \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100}$$
$$= \frac{50}{100}$$

(2)

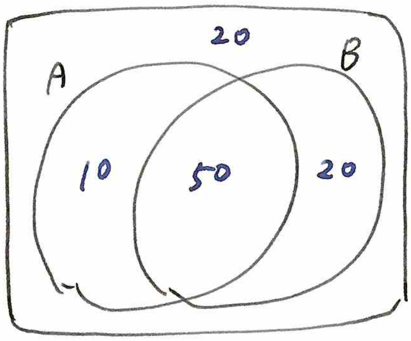
50人

(4) パンを買ったにもかかわらずジュースを買わなかった人は何人か？　$P(A \cap B^c) = ?$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ より

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{60}{100} - \frac{50}{100} = \frac{10}{100}$$

10人



例

日本の企業

T：勤務時間が常識の範囲内

H：人間関係が良好

調査結果

$P(T) = \frac{3}{4}$

$P(H) = \frac{7}{10}$

$P(T \cap H^c) = \frac{1}{5}$ ← つまり20%は、勤務時間はまずまずだが、人間関係に問題アリ。

問.

勤務時間と人間関係の両方で問題を抱えると病む人が急増すると言われている。
現在の日本の企業では、その確率は何%か？

$P(T^c \cap H^c) = ?$

・すぐわかること

$P(T^c) = \frac{1}{4}$

$P(H^c) = \frac{3}{10}$

さらに

$$P(T\cap H^c) = P(T) - P(T\cap H)$$ より

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{4} - P(T\cap H).$$

$$\therefore P(T\cap H) = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$$

従って $P(T\cup H) = P(T) + P(H) - P(T\cap H)$

$$= \frac{3}{4} + \frac{7}{10} - \frac{11}{20}$$

$$= \frac{1}{20}(15+14-11) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

以上より

$$P(T^c\cap H^c)$$

$$= P((T\cup H)^c)$$

$$= 1 - P(T\cup H)$$

$$= \frac{1}{10}$$

//

まとめ

確率の公理

$(P1)\ \forall A \subset S,\ P(A) \in [0,1]$

$(P2)\ P(S) = 1$

$(P3)\ \forall A, B \subset S,$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

確率の性質

(1) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(2) $P(\emptyset) = 0$

(3) $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

(4) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(5) $P(A) = 0$ or $P(B) = 0$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

(6) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

(7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(8) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

標本空間と確率

問題1. 確率の3つの公理

$(P1)$ 任意の事象Aについて、$P(A) \in [0,1]$である。

$(P2)$ $P(S) = 1$

$(P3)$ 事象A, Bについて、$A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

を基に、確率の性質(1)–(8)を導出せよ。

問題2. A, Bを標本空間Sの部分集合とし、S上の確率Pについて、$P(A)$, $P(B^C)$, $P(A \cup B)$がわかっているとする。このとき、以下をこれらを用いて表しなさい。

(1) $P(A \cap B)$　(2) $P(A \cap B^C)$　(3) $P(A \cup B^C)$

問題3. 会社の中で若手(40歳未満)は60%、英語が得意な社員(TOEIC700点以上)は30%、若手でかつ英語の得意な社員は20%である。以下の値を求めなさい。

(1) 会社としては、来年度、海外支社に一人派遣する計画を立てており、誰を送るか検討している。英語が得意であるか、または(仮に英語は得意でなくても意欲はあると期待できる)若手の中から選抜したい。そのような社員は、全体の何割か?

(2) 若手ではなく、かつ英語の不得意な社員は、全体の何割か?

(3) 若手ではないか、または英語の不得意な社員は、全体の何割か?

(4) 若手で、かつ英語の不得意な社員は、全体の何割か?

(5) 若手か、または英語の不得意な社員は、全体の何割か?

(6) 若手ではないか、または英語の得意な社員は、全体の何割か?

問題4. $A, B, C \subset S$とする。ベン図を書いて、次の問いに答えなさい。

(1) Aは、

$$A = \left[A \cap (B \cup C)^C\right] \cup [A \cap (B \cup C)] = [A \cap B^C \cap C^C] \cup [A \cap (B \cup C)]$$

と表され、しかも、$A \cap B^C \cap C^C$と$A \cap (B \cup C)$は互いに排反であることを確認しなさい。

(2) 次式を証明しなさい。

$$P(A \cap B^C \cap C^C) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$