指数関数の微積分

(1) e の定義

(2) 指数関数の微分と指数関数・対数関数のグラフ

(3) 指数関数の積分

(4) 合成関数の微分法と積分への応用

(5) 積の微分公式

e の定義

Def.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく

$\{a_n\}$ はどのような数列か？

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37037$$

$$\vdots$$

- $\{a_n\}$: 単調増加 monotone increasing

  i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqq a_{n+1}$

- $\{a_n\}$: 上に有界 bounded from above

  i.e. $\exists a > 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqq a$

この2点を確認できる。(ここでは省略。)

従って下の定理により $\{a_n\}$ は収束する。

Th.

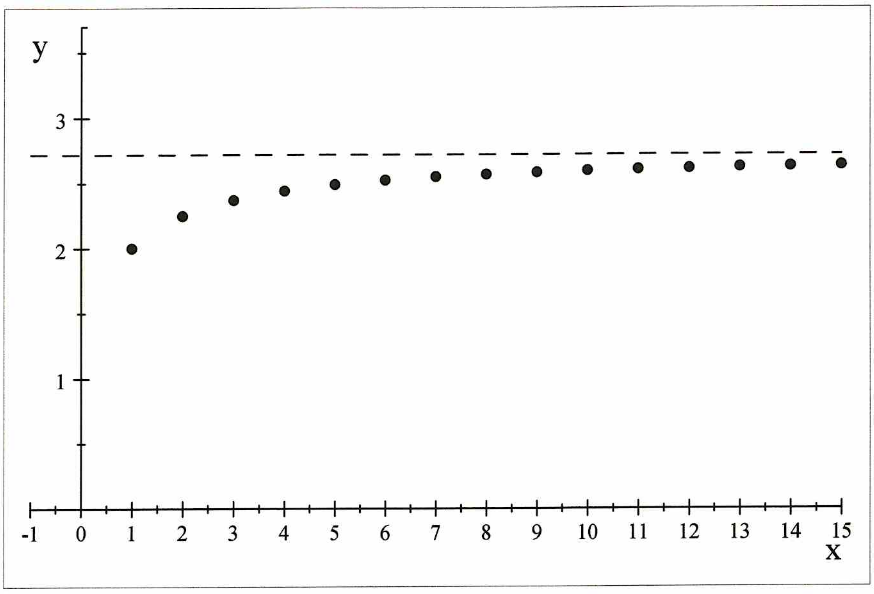
$\{x_n\}$ 数列

単調増加, 上に有界

$\Rightarrow \{x_n\}$: 収束する。

$\mathbb{R}$

$y = (1 + \frac{1}{n})^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$



$$\boxed{\begin{array}{l} y = e^x \\ \Rightarrow y' = e^x \end{array}}$$

ex

$y = 3x^2 + 2e^x$

このとき、$y' = ?$

$$y' = (3x^2 + 2e^x)'$$

$$= 3\cdot(x^2)' + 2\cdot(e^x)'$$

微分の線型性

$$= 3\cdot 2x + 2\cdot e^x$$

$$= \underline{6x + 2e^x}$$

ex

$y = 2x^3 - \frac{1}{2}e^x$

$$y' = 2\cdot 3x^2 - \frac{1}{2}e^x$$

$$= \underline{6x^2 - \frac{1}{2}e^x}$$

ex $y = -e^x + \sin x$

$$y' = \underline{-e^x + \cos x}$$

Remark

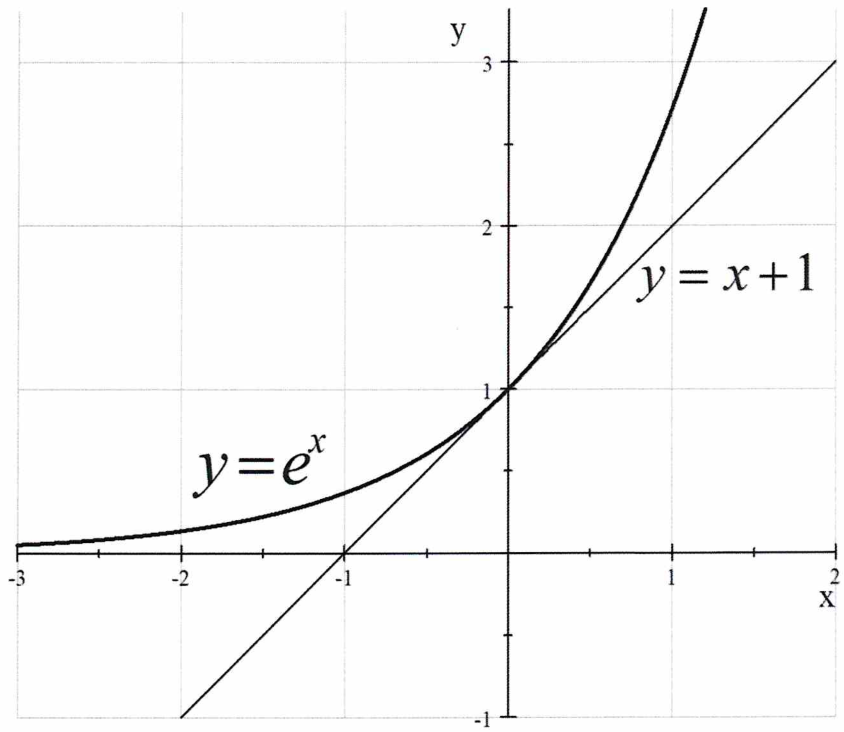
$y = e^x$ ← 変数 x が肩にのっている。

$\rightarrow y' = e^x$

$y = x^e$ ← 肩にのっているのは定数 e

$\rightarrow y' = e x^{e-1}$

指数関数 $y = e^x$ のグラフ



(1) 任意の x について、$y > 0$.

(2) $y \to \infty \quad as \ x \to \infty$

(3) $y \to 0 \quad as \ x \to -\infty$

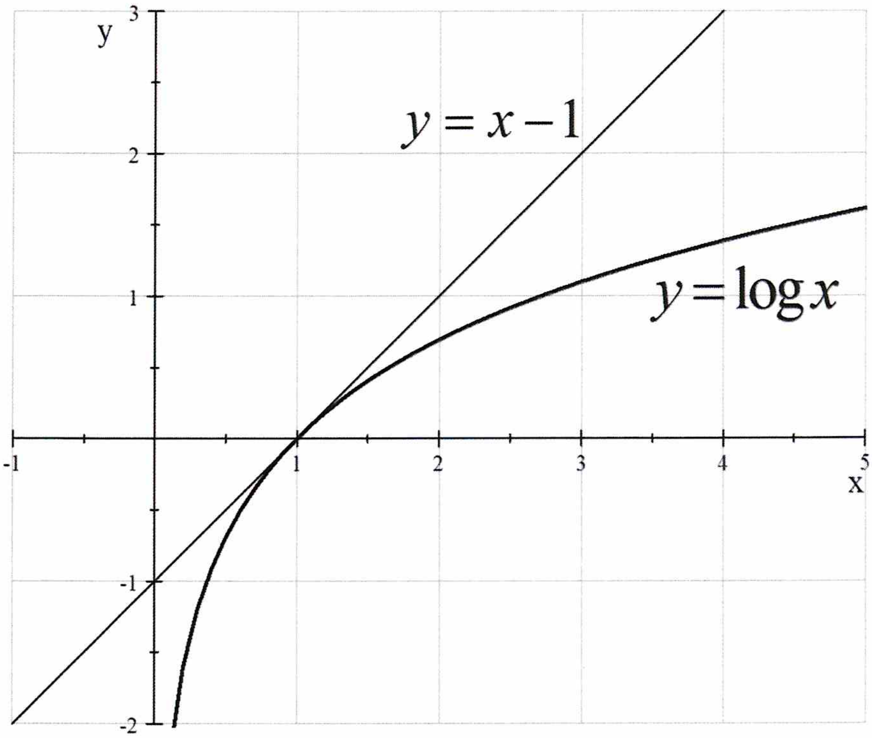
(4) $x = 0$ のとき、$y = 1$.

　　つまり、点$(0,\ 1)$を通る.

(5) $x = 0$ のときの接線の傾きは1.

　　その接線の方程式は、$y = x + 1$.

対数関数 $y=\log x$ のグラフ



(1) $x>0$ について、定義される.

(2) $y\to\infty \quad as\ x\to\infty$

(3) $y\to-\infty \quad as\ x\to 0$

(4) $x=1$ のとき、$y=0$.

つまり、点$(1,\ 0)$を通る.

(5) $x=1$ のときの接線の傾きは1.

その接線の方程式は、$y=x-1$.

積分

ex

$$\int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[e^x\right]_0^1$$

$$= e^1 - e^0$$

$$= e - 1$$

$(e^x)' = e^x$ 微分すると元に戻ることを check！

ex

$$\int_0^1 (2x - 3e^x) dx$$

積分の線型性

$$= \int_0^1 2x\,dx - 3\int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 - 3(e-1)$$

$$= 1^2 - 0^2 - 3e + 3$$

$$= 4 - 3e$$

ex

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx$$

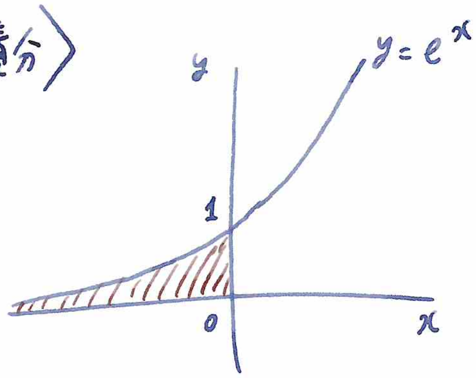
〈広義積分〉

$$= \left[e^x\right]_{-\infty}^0$$

$$= e^0 - \lim_{x \to -\infty} e^x$$

$$= e^0 - 0$$

$$= 1$$



$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

ex

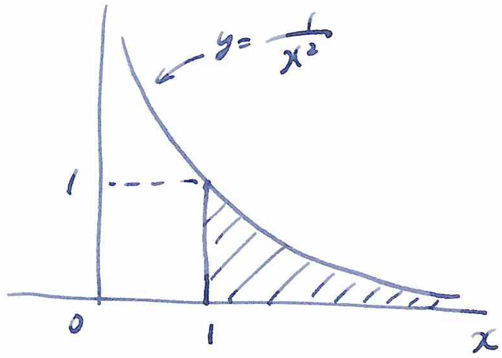
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int_1^\infty x^{-2}\,dx$$

$$= \left[-x^{-1}\right]_1^\infty$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \frac{1}{1}$$

$$= 1.$$



ex

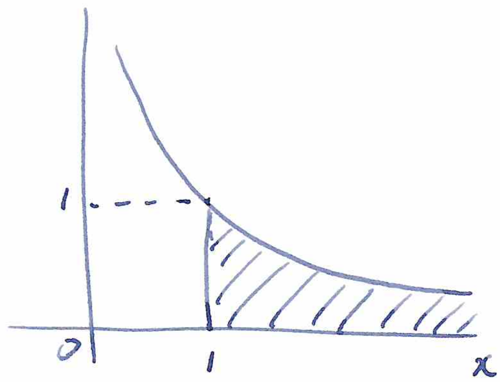
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_1^\infty x^{-1}\,dx$$

$$= \left[\log x\right]_1^\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty}\log x - \underbrace{\log 1}_{=0}$$

$$= \infty$$



これらも〈広義積分〉

合成関数の微分法

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\begin{cases} y = g(x) \\ z = f(y) = f(g(x)) \end{cases}$$

とおくと

$$\left(f(g(x))\right)' = \frac{dz}{dx}$$

$$f'(g(x)) = f'(y) = \frac{dz}{dy}$$

$$g'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

なので

合成関数の微分法

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

とも表される。

ex

$z = e^{2x}$

このとき $\dfrac{dz}{dx} = ?$

$y = 2x$ とおく.

すると $\dfrac{dy}{dx} = 2$

$z = e^{2x}$

$= e^{y}$ なので

$\dfrac{dz}{dy} = e^{y}$

よって $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$

$= e^{y} \cdot 2$

$= 2e^{y}$ $\quad y = 2x$

$= 2e^{2x}$

ex $y = e^{x^2}$

このとき $y' = e^{x^2} \cdot 2x$

$\therefore y' = 2xe^{x^2}$

ex

$z=(e^x+1)^2$ のとき

$$\frac{dz}{dx}=?$$

$y=e^x+1$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=e^x$$

また $z=y^2$ なので

$$\frac{dz}{dy}=2y$$

よって
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\\&=2y\cdot e^x\\&=2(e^x+1)e^x\end{aligned}$$

$y=e^x+1$

$\therefore z'=2(e^x+1)e^x$

ex

$z=(1-x)^4$

$\frac{dz}{dx}=?$

$y=1-x$ とおくと

$\frac{dy}{dx}=-1$ となる。

また、

$z=y^4$ なので

$\frac{dz}{dy}=4y^3$ である。

よって

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$=4y^3\cdot(-1)$$

$y=1-x$

$$=4(1-x)^3\cdot(-1)$$

$$=\underline{-4(1-x)^3}$$

ex

$y = 2^x$ のとき

$\dfrac{dy}{dx} = ?$

$y = 2^x$ より

$\log y = x \log 2$ が成り立つ。

ここで $z = \log y = x \log 2$ とおくと.

・$\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{1}{y}$

・$\dfrac{dz}{dx} = \log 2$

となる。よって.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ より}$$

$$\log 2 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \log 2$$

$$= 2^x \cdot \log 2.$$

以上より

$$\boxed{y=2^x \text{ のとき} \quad \rightarrow y'=2^x\cdot\log 2}$$

cf. $\boxed{y=e^x \quad \rightarrow y'=e^x}$

簡便法

$y=2^x$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=?$$

両辺の対数をとって

$$\log y = x\log 2$$

$$\therefore \frac{1}{y}dy=\log 2\, dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\cdot\log 2$$

$$=2^x\cdot\log 2$$

//

積分

ex

$y = e^{ax}$

$\Rightarrow y' = ae^{ax}$

$$\int_0^1 e^{ax}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{a} - e^{a\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{a} - 1\right)$$

check

$$\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\right)'$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cdot a$$

$$= e^{ax}$$

積の微分公式

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ex

$y = xe^x$

このとき、

$y' = (x)'e^x + x\cdot(e^x)'$

$= e^x + xe^x$

ex

$y = -2xe^x + 3e^{2x}$

このとき、

$y' = (-2xe^x + 3e^{2x})'$

微分の線型性

$= -2(xe^x)' + 3(e^{2x})'$

積の微分公式

合成関数の微分法

$= -2(e^x + xe^x) + 3(e^{2x}\cdot 2)$

$= -2e^x - 2xe^x + 6e^{2x}$

ex

$$y = (2x + x^2e^x)^3$$

このとき

$$y' = 3(2x + x^2e^x)^2 \cdot (2x + x^2e^x)'$$

合成関数の微分法

微分の線型性

$$= 3(2x + x^2e^x)^2 \cdot [2 + \underline{(x^2e^x)'}]$$

積の微分公式

$$= 3(2x + x^2e^x)^2 \cdot [2 + \underline{2xe^x + x^2e^x}]$$

ex

$y = x^3(1-x)^4$

$\dfrac{dy}{dx} = ?$

$\dfrac{dy}{dx} = (x^3)'(1-x)^4 + x^3((1-x)^4)'$ 積の微分公式

$= 3x^2(1-x)^4 + x^3 \cdot \left(4(1-x)^3(-1)\right)$ 合成関数の微分法

$= 3x^2(1-x)^4 - 4x^3(1-x)^3$

$= x^2(1-x)^3[3(1-x) - 4x]$

$= x^2(1-x)^3(3-7x)$

指数関数の微積分

問題1. 次の関数を微分せよ。

(1) $y = -x^3 - 2e^x$

(2) $y = e^{3x}$

(3) $y = 2e^{-3x}$

(4) $y = e^x - e^{2x} - e^{-3x}$

(5) $y = (x + e^x)^2$

(6) $y = \frac{1}{2}(1 - x)^4$

(7) $y = x^2 e^x$

(8) $y = (2x + e^{2x})^3$

(9) $y = -x^4(1 - x)^3$

問題2.

問題1の(8)の関数$y = (2x + e^{2x})^3$について、2階導関数y''を求めよ。

問題3. 次の積分を実行せよ。

(1) $\int_0^1 e^x dx$

(2) $\int_0^1 (x^2 - 3e^x) dx$

(3) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

(4) $\int_0^1 e^{2x} dx$

(5) $\int_0^1 2e^{2x} dx$

(6) $\int_0^1 (-e^{-x}) dx$