二項分布

ベルヌーイ試行

$$\begin{cases} H \ (\text{hit}\,;\ \text{成功}) & \text{with prob. } p \\ M \ (\text{miss}\,;\ \text{失敗}) & \quad\text{〃} \quad 1-p \end{cases}$$

where $p \in [0,1]$

この試行を n 回くり返す。

$$S = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i = H \text{ or } M \ (i=1,2,\cdots,n)\}$$

$$A_i = \{(x_1, \cdots, x_n) \in S \mid x_i = H\} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

「第 i 回目に成功する」という事象。

$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$: independent

$x_i = H$ or M が
x_i 以外から
影響を受けない。

このとき

「成功確率 p, 長さ n のベルヌーイ試行」

と呼ばれる。

※例えば $x_1, \cdots, x_{n-1}$ が全て M なら
主観的には次は $x_n = H$ になりそうな気がしてしまう。
しかし $\{A_1, \cdots, A_n\}$ が independent なら、そうはならない。

Th

成功確率 $p\ (\in [0,1])$, 長さ n のベルヌーイ試行

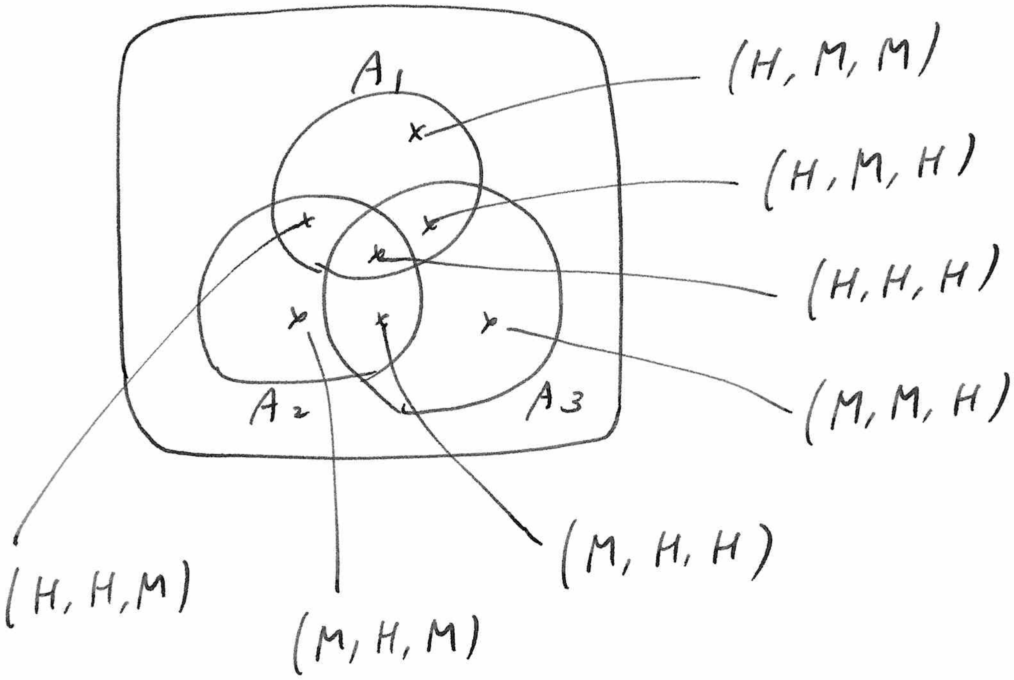
X : 成功回数を表す r.v.

$$\Longrightarrow P(X=x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$$

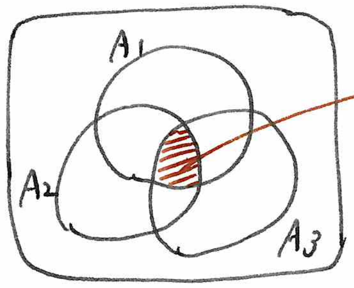
$(x=0,1,2,\cdots,n)$

となる。

このことを $n=3$ のケースで説明する。



• $H_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 3回とも成功

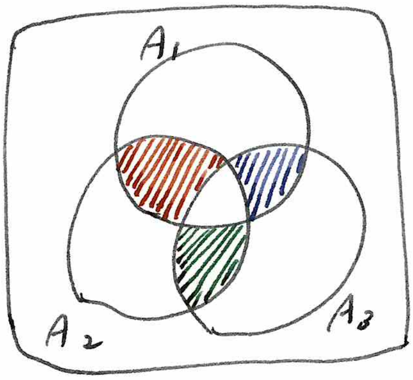


• $H_2 = \underline{(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)} \cup \underline{(A_1 \cap A_2^c \cap A_3)} \cup \underline{(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)}$

3回目だけ失敗する

disjoint

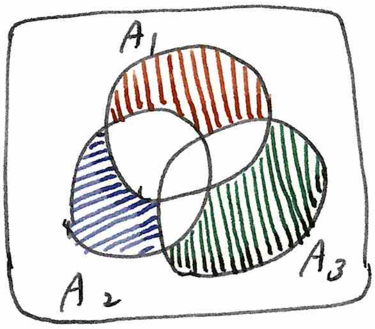
「2回成功する」という事象



- $H_1 = \underbrace{(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)}_{\text{1回目だけ成功する}} \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$

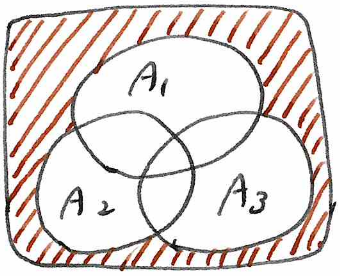
disjoint

「1回成功する」という事象



- $H_0 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

「0回成功」=「3回とも失敗する」という事象



※ $\{H_0, H_1, H_2, H_3\}$: partition of Ω

$$H_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$H_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$$

$$H_1 = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

$$H_0 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$$

各々の確率を求める。

$$P(H_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$\downarrow$ A_1, A_2, A_3 : independent

$$= P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

$$= p^3$$

$$P(H_2) = P((A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3))$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1) P(A_2) P(A_3^c) + P(A_1) P(A_2^c) P(A_3) + P(A_1^c) P(A_2) P(A_3)$$

$$= 3p^2(1-p)$$

Similarly,

$$P(H_1) = 3p(1-p)^2$$

$$P(H_0) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$$

$$= P(A_1^c) P(A_2^c) P(A_3^c)$$

$$= (1-p)^3$$

※ $H_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$

これは「2回成功する」という事象なので、

「3回目だけ失敗」「2回目だけ失敗」「1回目だけ失敗」

という3つの互いに排反な事象に分割される。

そして、この3つの事象それぞれが生じる確率は

$p^2(1-p)$

なので、

$P(H_2) = 3p^2(1-p)$ となる。

※ 3回のうち(順番は問わず)2回成功する

場合の数 ${}_3C_2 = 3$ が $p^2(1-p)$ にかかっている。

同様に考えて

※ $H_1 = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$

「1回だけ成功する」という事象.

$P(H_1) = 3p(1-p)^2$

$= {}_3C_1\, p(1-p)^2$

Th

> 成功確率 p $(\in[0,1])$, 長さ n
> のベルヌーイ試行
> X : 成功回数を表す r.v.
> $\Rightarrow P(X=x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$
> $(x=0,1,2,\cdots,n)$

二項分布 (binomial distribution)

$X \sim B(n,p)$

$\Leftrightarrow p(x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0,1,\cdots,n)$

- $p(x)$ 確率関数
  成功回数 p のベルヌーイ試行を n 回くり返したとき
  x 回成功する確率
- パラメーターは n と p.
  なので $B(n,p)$ と書く。
- x の動く範囲は、0 から n まで
  $x=0 \Leftrightarrow$ 1回も成功しないこと
  $x=n \Leftrightarrow$ n 回とも成功すること.

ex

コイン投げを3回行ってオモテが出る回数を

Xとすると.

- X : r.v.
- Xのとりうる値は.

$X = 0, 1, 2, 3$

↑確率的にこれらの値をとる.

全部たすと1になるだろう.

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$.

- $X \sim B(3, \frac{1}{2})$と考えられる。

$$P(0) = {}_3C_0\, p^0 (1-p)^{3-0}$$

$$= \frac{3!}{(3-0)!\,0!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$= \frac{3!}{(3-1)!\,1!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{3!}{(3-3)!\,3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

※ $\sum_{x=0}^{3} P(x) = 1$ となっている。

例

サイコロを6回投げて1回だけ1の目が出る確率は？

誤答

サイコロを1回投げて1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$.

6回投げるので $\frac{1}{6} \times 6 = 1$

これはマチガイ！

解

6回投げるうち、1の目が1回だけ出る出方は

${}_6C_1 = 6$ 通り.

1回目だけ1が出る, —①

2回目だけ 〃 . —②

……

6回目だけ 〃 . —⑥

① or ② or … or ⑥ なので

和の法則により、これら①～⑥の各々の確率をたせばよい。

① 1回目だけ1の目が出る確率は？

1回目は1の目が出る

その確率は $\frac{1}{6}$.

2回目は1以外の目が出る

その確率は $\frac{5}{6}$

同様に 2〜6回目は、1以外の目が

(5回の試行)

出なければならない。

その確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^5$。　よって $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$

② 2回目だけ1の目が出る確率は？

①の場合と同様で　$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$

…

以上より、サイコロを6回投げて1の目が1回だけ

出る確率は

$${}_6C_1\,\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$= 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \overset{約}{=} 40.19\%$$

※ $X \sim B\left(6, \frac{1}{6}\right)$ と考えて

$P(1) = {}_6C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{6-1}$ として求めるべきであった。

(先の例だけでなく)一般に

$$\boxed{\begin{aligned} & X \sim B(n, p) \\ & \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} P(x) = 1 \end{aligned}}$$

を示すためには 二項定理を用いる。

二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k$$

$$= {}_nC_0\, x^n + {}_nC_1\, x^{n-1} y + {}_nC_2\, x^{n-2} y^2 + \cdots$$

$$\cdots + {}_nC_{n-1}\, x y^{n-1} + {}_nC_n\, y^n$$

ex

$n = 3$

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} {}_3C_k\, x^{3-k} y^k$$

$$= {}_3C_0\, x^3 + {}_3C_1\, x^2 y + {}_3C_2\, x y^2 + {}_3C_3\, y^3$$

$$= x^3 + 3x^2 y + 3 x y^2 + y^3$$

$$X \sim B(n, p)$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{n} P(x) = 1$$

$$\text{i.e. } \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \, p^x (1-p)^{n-x} = 1$$

Proof.

From the binomial theorem,

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \, p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \left(p + (1-p)\right)^n \\ &= 1^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

//

※ 二項分布のモーメント母関数を求めるときにも二項定理を用いる。

$X \sim B(n, p)$

i.e. $p(x) = {}_nC_x \, p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \cdots, n)$

$\Rightarrow E[X] = np$

$\quad V[X] = np(1-p)$

<u>Proof</u>

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \, p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \, {}_nC_x \, p^x (1-p)^{n-x}$$

$x=0$のときは
Σの中はゼロなので

$$= \sum_{x=1}^{n} x \, {}_nC_x \, p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{(n-x)!\, x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

xの部分を
約分

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-x)!\,(x-1)!} p \cdot p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!\,(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$y = x-1$
$(x = y+1)$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-(y+1))!\, y!} p^y (1-p)^{n-(y+1)}$$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{((n-1)-y)!\, y!} p^y (1-p)^{(n-1)-y}$$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} {}_{n-1}C_y \, p^y (1-p)^{(n-1)-y}$$

二項定理

$$= np \left(p + (1-p)\right)^{n-1}$$

$$= np.$$

$\lrcorner$

$V[X] = ?$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= E[X(X-1)+X] - (E[X])^2$$
$$= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$$

$E[X(X-1)]$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-x)!\,(x-2)!} p^{x-2}(1-p)^{n-x}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!\,(x-2)!} p^{x-2}(1-p)^{(n-2)-(x-2)}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{((n-2)-y)!\,y!} p^y (1-p)^{(n-2)-y}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} {}_{n-2}C_y\, p^y (1-p)^{(n-2)-y}$$
$$= n(n-1)p^2 (p + (1-p))^{n-2}$$
$$= n(n-1)p^2$$

$$\therefore V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$$
$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$
$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$
$$= np(np - p + 1 - np)$$
$$= np(1-p).$$

※MGFを使った方がはるかに楽！

Thm（二項分布のモーメント母関数）

$X \sim B(n, p)$

$\Rightarrow M(t) \equiv E[e^{tX}]$

$= (e^t p + (1-p))^n$

Proof

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (e^t p)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= (e^t p + (1-p))^n$$

//

e^{tx}に確率のウェイトをつけて、xのとりうる範囲について足し上げた。

指数法則

二項定理

$$\boxed{\begin{aligned} &X \sim B(n, p) \\ &\Rightarrow E[X] = np \\ &\quad\; V[X] = np(1-p) \end{aligned}}$$

$$M(t) = \left[pe^t + (1-p)\right]^n$$

$$M'(t) = n\left[pe^t + (1-p)\right]^{n-1} \cdot pe^t$$

$$M'(0) = np \qquad \therefore E[X] = np.$$

$$M''(t) = n(n-1)\left[pe^t + (1-p)\right]^{n-2}(pe^t)^2 + n\left[pe^t + (1-p)\right]^{n-1} \cdot pe^t$$

$$M''(0) = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np$$

$$\therefore V[X] = M''(0) - \left[M'(0)\right]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

//

例.

デパート

ある商品を入荷する。

不良品率は 0.5%

(1) この商品を100個仕入れたとき、不良品の数が
0個, 1個, 2個, 3個 となる確率を求めよ。

解

X: 100個仕入れたときの不良品の数を表すr.v.

とすると

$X \sim B\left(100, \frac{1}{200}\right)$ と考えられる。

従ってXの確率関数は

$$p(x) = {}_{100}C_x \left(\frac{1}{200}\right)^x \left(\frac{199}{200}\right)^{100-x} \quad (x=0,1,\cdots,100)$$

となる。ゆえに、

$$p(0) = {}_{100}C_0 \left(\frac{1}{200}\right)^0 \left(\frac{199}{200}\right)^{100} = 0.60577\cdots$$

$$p(1) = {}_{100}C_1 \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^1 \left(\frac{199}{200}\right)^{99} = 0.30440\cdots$$

$$p(2) = {}_{100}C_2 \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^2 \cdot \left(\frac{199}{200}\right)^{98} = 0.075719\cdots$$

$$p(3) = {}_{100}C_3 \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^3 \cdot \left(\frac{199}{200}\right)^{97} = 0.01242\cdots$$

以上より、不良品の数が 0個, 1個, 2個, 3個

となる確率は、順に

約60.58%, 約30.44%, 約7.57%, 約1.24%

である。

(2) この商品を100個仕入れたときの不良品の数の期待値と標準偏差を求めよ。

解

(1)に引き続き、

X : 不良品の個数(100個仕入れたとき), r.v.

とする。

$X \sim B\left(100, \frac{1}{200}\right)$ なので

$E[X] = 100 \times \frac{1}{200} = \underline{0.5個}$

$V[X] = 100 \times \frac{1}{200} \times \frac{199}{200} = 0.4975$

$\sqrt{V[X]} = 0.7053\cdots \quad \therefore \sqrt{V[X]} \fallingdotseq \underline{0.71個}$

例

ある製品

不良品率　10%

3コ詰めの箱の中に不良品が混ざっている確率は？

X : 3コの中の不良品の数 (r.v.)

$X \sim B(3, \frac{1}{10})$

$$P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{3-1}$$

$$= \frac{3!}{(3-1)!1!} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$= 3 \cdot \frac{81}{1000} = \frac{243}{1000} = 0.243$$

24.3%

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-2}$$

$$= \frac{3!}{(3-2)!2!} \frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10}$$

$$= 3 \cdot \frac{9}{1000} = \frac{27}{1000} = 0.027$$

2.7%

$$P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-3}$$

$$= \frac{3!}{(3-3)!\,3!} \cdot \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$\underline{0.1\%}$$

$$P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-0}$$

$$= \frac{3!}{(3-0)!\,0!} \; \frac{729}{1000} = 0.729$$

$$\underline{72.9\%}$$

解

$$\sum_{x=1}^{3} {}_3C_x \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{3-x}$$

$$= \underbrace{{}_3C_1 \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2}_{=P(X=1)} + \underbrace{{}_3C_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)}_{=P(X=2)} + \underbrace{{}_3C_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{1}{10}\right)^0}_{=P(X=3)}$$

$$= \frac{243}{1000} + \frac{27}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{271}{1000}$$

$$\underline{27.1\%}$$

別解

$$P(X=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

$$\underline{27.1\%}$$

例.

0〜9の10択問題が3題ある。

全くわかっていない受験生

X : 正確数 (r.v.)

$X \sim B(3, \frac{1}{10})$

$$P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-1}$$

$$= \frac{3!}{(3-1)!1!} \frac{81}{1000} = \frac{243}{1000} \qquad \underline{24.3\%}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)$$

$$= \frac{3!}{(3-2)!2!} \frac{9}{1000} = \frac{27}{1000} \qquad \underline{2.7\%}$$

$$P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-3}$$

$$= \frac{3!}{(3-3)!3!} \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} \qquad \underline{0.1\%}$$

$$P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{3-0}$$

$$= \frac{3!}{(3-0)!0!} \frac{9^3}{1000} = \frac{729}{1000} \qquad \underline{72.9\%}$$

(マグレで)たとえ1問でも正確する確率はいくらか？

$$P(X=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3)=\ ?$$

解

$$\sum_{x=1}^{3} {}_3C_x \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{3-x}$$

$$= {}_3C_1 \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^2 + {}_3C_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right) + {}_3C_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^0$$

$$= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$= \underline{27.1\%}$$

別解

$$P(X=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3)$$

$$= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$= 1-P(X=0)$$

$$= 1-{}_3C_0 \left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$= 1-\frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

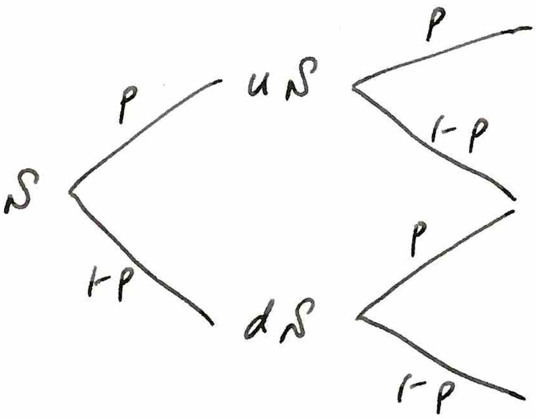
$$\underline{27.1\%}$$

例.（二項モデル）

$$\underset{\text{株価}}{S}\begin{cases} uS & \text{with Prob. } p \\ dS & 〃 \quad 1-p \end{cases}$$

ただし，$0<d<1<u$.

↓ 二期間



u^2S	with Prob.	p^2
udS	〃	$2p(1-p)$
d^2S	〃	$(1-p)^2$

X：T期間，この株を保有した場合に上昇する回数

$$X \sim B(T, p)$$

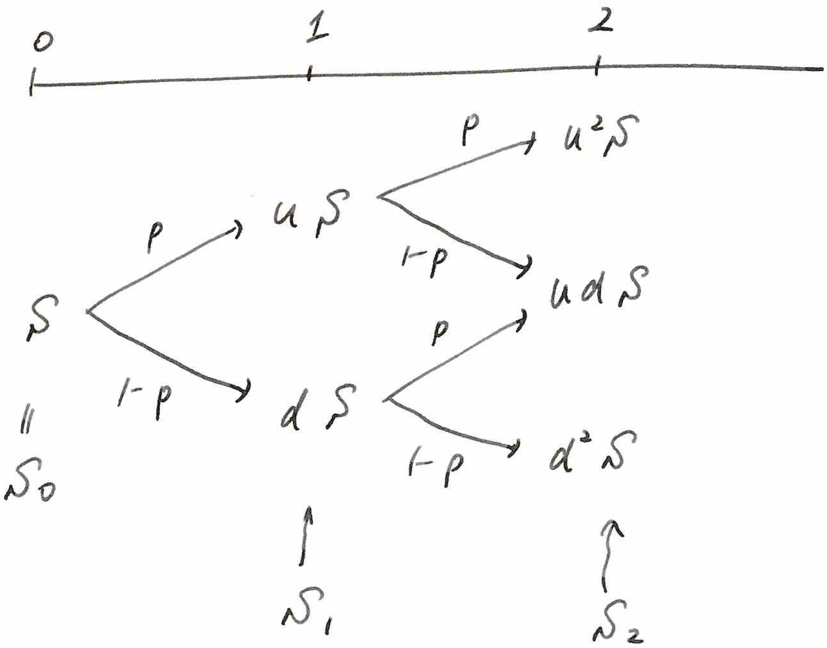
k回上昇する確率は？

$$p(k) = {}_T C_k \, p^k (1-p)^{T-k} \qquad (k=0,1,\cdots,T)$$

k回上昇したとき，T期後の株価は？

$$S u^k d^{T-k}$$

T期後、つまり第T期の株価を S_T とする.



$E[S_T] = ?$

$$E[S_T] = \sum_{k=0}^{T} {}_TC_k\, p^k (1-p)^{T-k} \cdot S u^k d^{T-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{T} {}_TC_k\, (pu)^k \left((1-p)d\right)^{T-k} \cdot S$$

二項定理

$$= S\left(pu + (1-p)d\right)^T$$

例.

1年間に事故が起こる確率が $\frac{1}{100}$ の保険契約があるとする。今年の契約件数は200件であった。
2件以上の事故が起こる確率は？

解

X : 事故件数を表すr.v.とする。

$X \sim B\left(200, \frac{1}{100}\right)$ と考えられる。

確率関数は

$$P(x) = {}_{200}C_x \left(\frac{1}{100}\right)^x \left(\frac{99}{100}\right)^{200-x}$$ である。

$(x = 0, 1, 2, \cdots, 200)$

求める確率は.

$$P(X \geqq 2) = 1 - (P(0) + P(1))$$

$$= 1 - {}_{200}C_0 \left(\frac{1}{100}\right)^0 \left(\frac{99}{100}\right)^{200} - {}_{200}C_1 \left(\frac{1}{100}\right)^1 \left(\frac{99}{100}\right)^{199}$$

$$= 0.59535$$

∴ 約59.5%

※ $E[X] = 2$

$$V[X] = 200 \cdot \frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{100}\right) = 2 \times \frac{99}{100} = 1.98$$

二項分布

問題1．成功する確率が$p(\in [0,1])$の試行をn回繰り返すときの成功回数をXとすると、Xは二項分布に従う確率変数である。

（1）x回成功する確率$p(x)$は、どう表されるか？ xの取りうる範囲とともに答えなさい。

（2）（1）で答えた確率をxの取りうる範囲について足すと1になることを示しなさい。

（3）二項分布のモーメント母関数を答えなさい。

（4）二項分布の期待値と分散を求めなさい。

以下、計算には関数電卓などを使えばよい。

問題2．毎日、1/4の確率で県内のどこかで交通事故が発生している。今週、県内で事故が1件も発生しない確率を求めよ。ただし、一日に2回事故が起こることはないと仮定する。

問題3．あなたはレストランの支配人であるとする。これから今月の最終週を向かえるが、天気予報によるとどの日も降水確率が25％である。雨が降ると客足が伸びない。一日でも雨が降ると今月の売り上げ目標の達成は難しい。目標を達成できないと、こわもての地区長にキレられることになる。あなたがキレられて半泣きになる確率を求めよ。

問題4．あなたの勤務先が扱っているある製品3個を箱詰めにして販売している。この製品1個当たり、不良品の発生率は10%である。

（1）箱に含まれる不良品の数をXとして、その期待値と標準偏差を求めよ。

（2）箱の中に不良品が1個含まれる確率を求めよ。

（3）箱の中に不良品が2個含まれる確率を求めよ。

（4）箱の中の製品すべてが不良品である確率を求めよ。

（5）箱の中に不良品が含まれない確率を求めよ。

問題5．あなたが勤める病院で、今週、成功率10%といわれる手術が10件予定されている。

（1）成功数をXとして、その期待値と標準偏差を求めよ。

（2）1件も成功しない確率を求めよ。

（3）1件だけ成功する確率を求めよ。

（4）2件以上成功する確率を求めよ。

問題6．レジュメの例などを参考にして、二項分布を用いる問題を自分で考え、それに解答を与えよ。