ポワソン分布

$X \sim B(n,p)$ binomial distribution

$\Leftrightarrow p(x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \cdots, n)$

$X \sim Po(\lambda)$ Poisson distribution

$$\Leftrightarrow p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots)$$

where $\lambda > 0$.

Th

$${}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{array}{l} np = \lambda : \text{const.} \\ n \to \infty \ (p \to 0) \end{array}$$

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, 2, \cdots$$

Special Cases

- $p = 0$

$${}_nC_x\, 0^x (1-0)^{n-x} = 0$$

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-0} \frac{0^x}{x!} = 0.$$

$\uparrow$

$p = 0$

$\Rightarrow \lambda = np = 0$

- $\underline{x=0}$

$${}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} \quad \Big\downarrow x=0$$

$$= {}_nC_0\, p^0 (1-p)^{n-0}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^n \quad \Big\downarrow np=\lambda$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\longrightarrow e^{-\lambda} \quad (n\to\infty \text{ with } np=\lambda : \text{const.})$$

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \Big\downarrow x=0$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}$$

$$= e^{-\lambda} ..$$

例

$${}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{array}{l} np=\lambda\ (\geqq 0) : \text{const.} \\ n\to\infty\ (p\to 0) \end{array}$$

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad (\forall x=0,1,2,\cdots)$$

Proof

Let $x=0,1,2,\cdots$.

$${}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\Big\downarrow\ p=\frac{\lambda}{n}$$

$$=\frac{n!}{(n-x)!\,x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

(λとxはnと無関係)

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}_{x\text{コ}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^x\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\longrightarrow \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (\text{as } n\to\infty).$$

//

例.

ある交差点

λ : 1年間の平均事故回数 ← 経験的に既知と仮定する。

X : 1年間の事故回数を表す r.v.

(1年間 = 365日 = 8760 h)

- 1日に2回事故が起こることはないとすると、

事故が「起きる」or「起きない」

起きる確率 $\dfrac{\lambda}{365}$ のベルヌーイ試行を

365回くり返すこと、とみなせる。

$$\therefore X \sim B\left(365, \frac{\lambda}{365}\right)$$

- 1日に2回以上事故が起きるかもしれないが、

1 h の間にはせいぜい1回までとすると、

事故発生確率 $\dfrac{\lambda}{8760}$ のベルヌーイ試行を

8760回くり返すこと、とみなせる。

$$\therefore X \sim B\left(8760, \frac{\lambda}{8760}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \\ \downarrow\ n \to \infty \\ X \sim Po(\lambda) \end{array}}$$

例.

あるデパートの売り場

平均すると一時間に2人の来客があるとする。

X: 一時間あたりの来客数を表す r.v.

- 10分の間に2人来ることはないとすると、

  客が「来る」or「来ない」で

  「来る」確率が $\frac{2}{6}$ のベルヌーイ試行を

  6回くり返すこととみなせる。

  $\therefore X \ \dot{\sim}\ B\left(6, \frac{2}{6}\right)$

- 10分間に2人の来客があるかもしれないが、

  1分間に2人の来客はないとすると、

  「来る」確率が $\frac{2}{60}$ のベルヌーイ試行を

  60回くり返すこと、とみなせる。

  $\therefore X \ \dot{\sim}\ B\left(60, \frac{2}{60}\right)$

$$X \sim B\left(n, \frac{2}{n}\right)$$

$$\Bigg\downarrow \begin{array}{l} n \cdot \frac{2}{n} = 2 : 一定 \\ n \to \infty \end{array}$$

$$X \sim P_o(2)$$

X はパラメーター2のポワソン分布にしたがうとみなせる。

λ: 単位時間あたりの平均事故回数 $(\lambda > 0)$

X: 〃 事故回数を表す r.v.

$\Rightarrow X \sim Po(\lambda)$ with $\lambda > 0$.

λ: 事故の発生しやすさを表すパラメーター
と解釈できる。

ポワソン分布

$$X \sim P_o(\lambda) \quad (\lambda \geqq 0)$$

$$\Leftrightarrow P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots)$$

check

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = 1}$$

Proof

$$\begin{aligned} LHS &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \Big[\underbrace{1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots}_{= e^{\lambda}\text{のマクローリン展開}} \Big] \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\ &= 1. \end{aligned}$$

//

Th (ポワソン分布の MGF)

$X \sim Po(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

i.e. $p(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots)$

$\Rightarrow M(t) \equiv E[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Proof.

We have that

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}
$$

//

Th

$$X \sim Po(\lambda)$$

$$\Rightarrow E[X] = V[X] = \lambda$$

Proof

We know that for $X \sim Po(\lambda)$,

$$M(t) \equiv E[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Thus,

$$M'(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t$$

$$M''(t) = e^{\lambda(e^t-1)} (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t (\lambda e^t + 1).$$

We have that

$$E[X] = M'(0) = \lambda$$

$$E[X^2] = M''(0) = \lambda^2 + \lambda.$$

Thus, $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda.$$

$$\therefore E[X] = V[X] = \lambda.$$

//

二項分布とポワソン分布：再論

	二項分布 $B(n,p)$	ポワソン分布 $Po(\lambda)$
確率関数	$p(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$	$p(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$
の範囲	$x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$	$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$
モーメント母関数	$M(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$	$M(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$
期待値	$E[X] = np$	$E[X] = \lambda$
分散	$V[X] = np(1-p)$	$V[X] = \lambda$

$$\xrightarrow[n \to \infty\ (p \to 0)]{}$$

$np = \lambda$: constant

$n \to \infty\ (p \to 0)$

例.

ある会社

商品の受注をアルバイトが行っている。

経験的に1000件に5件の割合いでミスする

ことがわかっている。

50件の受注を処理する際のミスの回数を表す

確率変数(r.v.)をXとする。

(1) Xはどのような二項分布に従うと考えられるか?

$$X \sim B\left(50, \frac{1}{200}\right)$$

(2) r.v. Xをポワソン分布$Po(\lambda)$で近似する。

パラメーターλの値を求めよ。

200件に1件の割合いでミスするので、50件処理

する際の平均ミス回数は

$$\lambda = \frac{1}{4}\text{件}$$

である。

(3) 50件処理する際に1件もミスをしない確率を

ポワソン分布による近似で求めよ。

$$X \sim B\left(50, \frac{1}{200}\right) = B\left(50, \frac{1/4}{50}\right)$$ なので

$$X \sim Po\left(\frac{1}{4}\right)$$ で近似できる。

したがってXの確率関数は

$$p(x) = e^{-\frac{1}{4}} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{x!}$$ となる。

よって $p(0) = e^{-\frac{1}{4}} = 0.77880\cdots$ ∴ 約77.88%

※ (3)を二項分布の確率関数

$$P(x) = {}_{50}C_x \left(\frac{1}{200}\right)^x \left(1-\frac{1}{200}\right)^{50-x}$$

を用いて計算すると.

$$P(0) = {}_{50}C_0 \left(\frac{1}{200}\right)^0 \left(\frac{199}{200}\right)^{50}$$

$$= \left(\frac{199}{200}\right)^{50}$$

$$= 0.778312\cdots$$

∴ 約77.83%

(4) 受注の処理を正社員にまかせると、ミスの割合いが1000件中2件に減少するとする。
このとき、50件の処理で1件もミスしない確率はいくらか？（ポワソン近似で答えなさい。）

$X \sim B\left(50, \frac{1}{500}\right)$ と考えられ、この二項分布をポワソン分布で近似するときのパラメーターは、

$\lambda = 1/10$ である。

$X \sim Po\left(\frac{1}{10}\right)$ の確率関数は

$$P(x) = e^{-\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^x}{x!}$$ なので

$P(0) = e^{-\frac{1}{10}} = 0.904837\cdots$ となる。

よって、約90.48%.

$X \sim Po(2)$

$$P(x) = e^{-2}\frac{2^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$P(0) = e^{-2}$$

$$P(1) = 2e^{-2}$$

$$P(2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}$$ ← ここが平均

$$P(3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} = e^{-2}\frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot2\cdot1} = \frac{4}{3}e^{-2}$$

$$P(4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = e^{-2}\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{2}{3}e^{-2}$$

$$P(5) = e^{-2}\frac{2^5}{5!} = e^{-2}\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{4}{15}e^{-2}$$

$$P(6) = e^{-2}\frac{2^6}{6!} = e^{-2}\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{4}{45}e^{-2}$$

$$P(7) = e^{-2}\frac{2^7}{7!} = e^{-2}\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{8}{315}e^{-2}$$

$\cdots$

例.

X : ある駐車場に午後3時から5時に到着する車の台数

$X \sim Po(12)$ とする。

⟶ 平均12台, 分散12(台^2)である。

> 今日, この時間帯に10台以上の車が到着する確率は?

$$P(X \geqq 10)$$
$$= 1 - P(X \leqq 9)$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{9} e^{-12} \frac{12^x}{x!}$$
$$\fallingdotseq 1 - 0.242$$
$$= 0.758$$

約75.8%

ポワソン分布

問題1．（二項分布からポワソン分布へ）
nを自然数、$x = 0, \cdots, n$、さらに$p \in [0, 1]$とする。nを$np = \lambda$（一定値）に保ちながら大きくすると

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

となる。このことを示せ。

問題2． 確率変数Xは、ポワソン分布に従うとする。
（1）Xの確率関数$p(x)$を答えよ。また、xの取りうる範囲はどうなるか。
（2）（1）で答えた確率をxの取りうる範囲について足すと1になることを示しなさい。
（3）ポワソン分布のモーメント母関数を答えなさい。
（4）ポワソン分布の平均と分散を求めなさい。

以下、計算には関数電卓などを使えばよい。

問題3． 新たに設立された企業が3年以内に倒産する割合は1/50と言われている。今年の県内の新規設立企業は50社であった。これらのうち、3年以内に倒産する企業数を確率変数Xで表す。
（1）確率変数Xは、どのような二項分布に従うと考えられるか？ $X \sim B(a, b)$という形で答えよ。
（2）確率変数Xをポワソン分布$Po(\lambda)$で近似する。パラメーターλの値を答えよ。
（3）3年以内に一社も倒産しない確率をポワソン分布による近似で答えよ。
（4）3年以内に1社倒産する確率をポワソン分布による近似で答えよ。
（5）3年以内に5社以上倒産する確率をポワソン分布による近似で答えよ。

問題4． 問題3の状況と比較して景気が悪化し、新たに設立された企業のうち、3年以内に倒産する割合は1/20という経済環境になった。今年の県内の新規設立企業は50社について、問題3の解答との比較を念頭に置いて、以下の問いに答えよ。
（1）3年以内に一社も倒産しない確率は、景気が悪化する前と比較して上がるだろうか、下がるだろうか？ 実際に計算して、予想が当たっていたか、確かめなさい。
（2）3年以内に1社倒産する確率は、景気が悪化する前と比較してどう変化するか、計算して確かめなさい。
（3）3年以内に5社以上倒産する確率についても、景気が悪化する前と比較してどう変化するか、計算して確かめなさい。

問題5． あなたはある会社で電話でのクレーム対応を担当している。1日平均3件の電話があるとする。
（1）1日に1件も電話がない確率を求めよ。
（2）1日に6件以上の電話がある確率を求めよ。

問題6． レジュメの例などを参考にして、ポワソン分布を用いる問題を自分で考え、それに解答を与えよ。