連続確率変数，一様分布

r.v. X の実現値 x の空間が連続の場合

例.

X : バスの到着時間を表す r.v.

X : 名目円・ドルレートの値 (ほぼ連続)

Def. (確率密度関数 probability density function ; p.d.f.)

X : r.v.

f : p.d.f. for X

$\Leftrightarrow$ ① $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

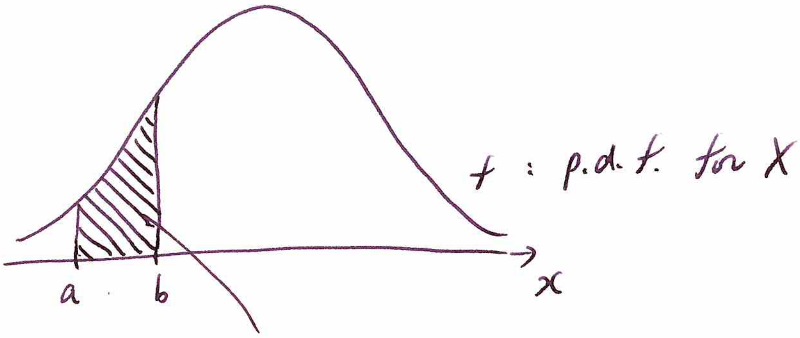
③ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leqq b,$

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Def. (確率分布関数 probability distribution function)

$$F(x) = P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

イメージ



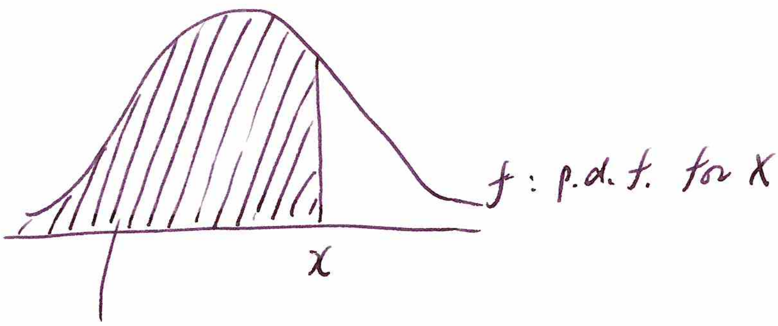
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\parallel$$

$$P(a \le X \le b)$$

$$\parallel$$

r.v. Xの実現値が区間$[a, b]$に入る確率



$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)$$

r.v. Xがx以下の値をとる確率

分布関数というときには、このxを変数とみなしている。

Th

$$\boxed{\begin{aligned} &① \ f(x) = F'(x) \\ &② \ P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \end{aligned}}$$

Proof

① $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$= f(x)$

微分積分学の基本定理

② $P(a \leqq X \leqq b)$

$= \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$= \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b}$ ①

$= F(b) - F(a).$

//

※ 分布関数は密度関数の原始関数.

※ 密度関数や分布関数は r.v. X についての確率分布に関する全ての情報を含んでいる.

※ $P(X = a) = \displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

※ $P(a \leqq X \leqq b) = P(a < X \leqq b)$

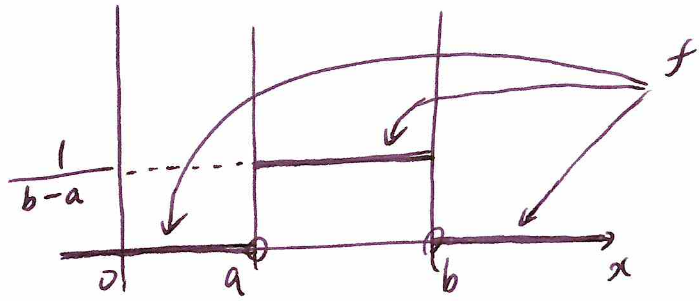
$= P(a \leqq X < b) = P(a < X < b)$

一様分布 (uniform distribution)

$X \sim U[a,b]$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

p.d.f.



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$$

check

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= 0 + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx + 0$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[x\right]_{x=a}^{b}$$

$$= \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$$

//

$X \sim U[a, b]$

i.e. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a, b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } b < x \end{cases}$

Proof.

(i) $x < a$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

(ii) $a \leq x \leq b$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{b-a}\left[t\right]_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

(iii) $b < x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{b} f(t)\,dt + \int_{b}^{x} f(t)\,dt$$

$$= 0 + 1 + 0$$

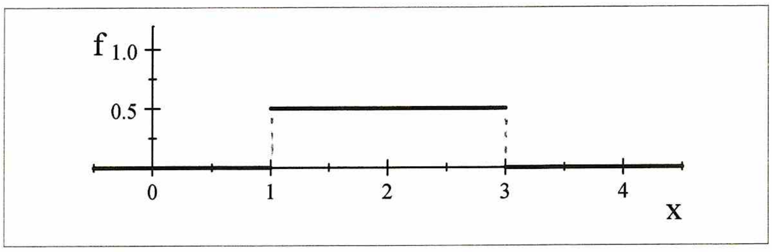
$$= 1.$$

//

一様分布

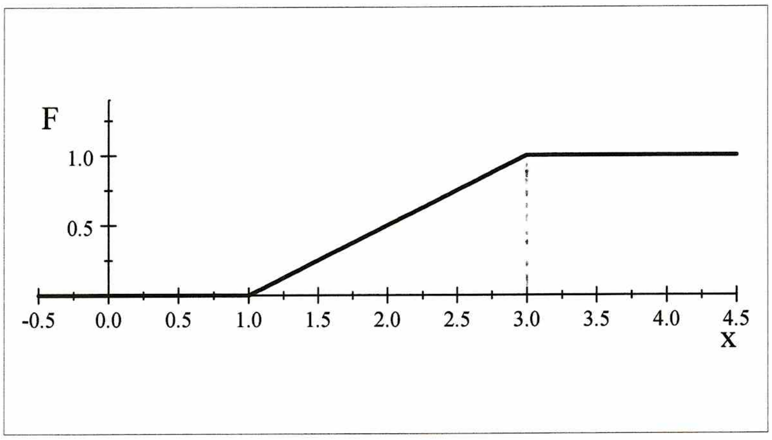
$X \sim U[1,3]$
p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



分布関数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } a < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{if } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{if } 3 < x \end{cases}$$



分布関数の基本的性質

- $F(x) \to 1 \quad (x \to \infty)$
- $F(x) \to 0 \quad (x \to -\infty)$
- $F(x) \in [0,1]$

上の例では明らかに満たされている。

Th (期待値と分散)

$X \sim U[a,b]$

i.e. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$\Rightarrow E[X] = \frac{a+b}{2}$

$V[X] = \frac{1}{12}(a-b)^2$

Proof.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\
&= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} (b^2 - a^2) \\
&= \frac{b+a}{2}.
\end{aligned}
$$

┘

$$E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} (b^3 - a^3)$$

$$= \frac{1}{3} (b^2 + ba + a^2)$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{1}{3} (b^2 + ba + a^2) - \frac{1}{4} (b^2 + 2ba + a^2)$$

$$= \frac{1}{12} \left(4b^2 + 4ba + 4a^2 - (3b^2 + 6ba + 3a^2) \right)$$

$$= \frac{1}{12} (b^2 - 2ba + a^2)$$

$$= \frac{1}{12} (b-a)^2.$$

//

Th (モーメント母関数)

$X \sim U[a, b]$

$\Rightarrow M(t) = E[e^{tX}]$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at}) & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

Proof

(i) $t=0$

$M(t) = E[e^{0 \cdot X}] = E[1] = 1$ ┘

(ii) $t \neq 0$

We have that

$M(t) = E[e^{tX}]$

$$= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$$

//

$t \to 0 \Rightarrow M(t) \to 1$

ロピタルの定理

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{bt}-e^{at}}{t} = \lim_{t\to 0}(be^{bt}-ae^{at}) = b-a.$$

$$\therefore M(t) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$$

$$\longrightarrow 1 \quad (t \to 0)$$

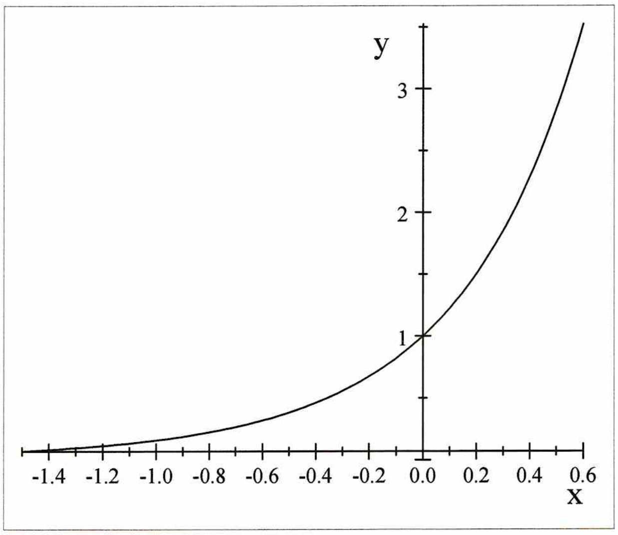
※ $M(t)$ は $t=0$ で連続ではある。

しかし、

$E[X]$ や $V[X]$ の計算には $M(t)$ は使いにくい。

$X \sim U[1,3]$

$M(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{t})$



例.

X : ある製品の寿命を表す r.v.

$$X \sim U[1200, 1800]$$

とする。(単位は[日]).

(1) X の p.d.f. を求めよ。

(2) $E[X]$ と $V[X]$ を求めよ。

(3) この製品が 1400 日以内に故障する確率を求めよ。

(4) この製品が 1500 日以上もつ確率を求めよ。

解

(1) $X \sim U[1200, 1800]$ なので p.d.f. は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{600} & \text{if } 1200 \leqq x \leqq 1800 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) $E[X] = \frac{1}{2}(1200 + 1800) = \underline{1500\ [日]}$

$V[X] = \frac{1}{12}(1800 - 1200)^2 = \frac{1}{12} 600^2 = \underline{3000[日^2]}$

※ 標準偏差は、

$\sqrt{V[X]} = \sqrt{3000} \fallingdotseq \underline{54.77\ [日]}$

(3) $P(X \leqq 1400)$

$$= \int_{-\infty}^{1400} f(x)\,dx$$

$$= \int_{1200}^{1400} \frac{1}{600}\,dx$$

$$= \frac{200}{600}$$ より

$$P(X \leqq 1400) = \frac{1}{3}$$

(4) $P(X \geqq 1500)$

$$= \int_{1500}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{1500}^{1800} \frac{1}{600}\,dx$$

$$= \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$ より

$$P(X \geqq 1500) = \frac{1}{2}$$

一様分布

問題1. $X\sim U[a,b]$を一様分布に従う確率変数とする。
(1)密度関数fと分布関数Fを述べなさい。
(2)Xの期待値$E[X]$と分散$V[X]$を求めなさい。
(3)のモーメント母関数を求めなさい。

問題2. あなたは見知らぬ駅についた。時刻表を見るのを忘れてしまったが、30分に1本電車が来ることが分かっている。
(1)待ち時間の期待値と標準偏差を求めなさい。
(2)5分以内に電車に乗れる確率はいくらか？
(3)20分以上待つことになる確率はいくらか？