指数分布

Th.

λ: 単位時間あたりの事故の平均回数

X: 事故が発生するまでの時間, r.v.

f: p.d.f. for X

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geqq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Proof.

$x \geqq 0$ に対して X の分布関数が

$$P(X \leqq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

となることを示せばよい。

そのために、$P(X \geqq x)$ $\left(= 1 - P(X \leqq x)\right)$ に注目する。

$P(X \geqq x)$ は、時刻 x までは事故が発生しない確率である。

よって、

Y: 時刻 x までに事故が起こる回数, r.v.

$P_Y(y)$: Y の確率関数

とおくと、

$$P(X \geqq x) \left(= 1 - P(X \leqq x)\right) = P_Y(0)$$

である。

Yの確率分布について考えてみる。$x \geqq 0$ とする。

仮定より、単位時間あたり平均 λ 回事故が起こる。

従って、時刻 x までには、平均 λx 回事故が起こる。

このことから、$Y \sim Po(\lambda x)$ と考えられる。

(ここで $x \geqq 0$ は固定して考えられている。)

ゆえに、
$$p_Y(y) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^y}{y!} \quad (y = 0, 1, 2, \cdots)$$

である。

よって $P(X \geqq x) = p_Y(0) = e^{-\lambda x}$ であり、

$P(X \geqq x) = 1 - P(X \leqq x) = e^{-\lambda x}$ より、

$$P(X \leqq x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad ({}^{\forall} x \geqq 0)$$

が得られる。

//

Def. (指数分布; exponential distribution)

$X \sim Ex(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

$\iff$ • p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geqq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$\iff$ • 分布関数

$$F(x) = P(X \leqq x)$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{if } x \geqq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

• p.d.f の性質

① $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

③ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leqq b,$

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

• 分布関数の性質

(1) $F(x) \to 1 \quad (\text{as } x \to \infty)$

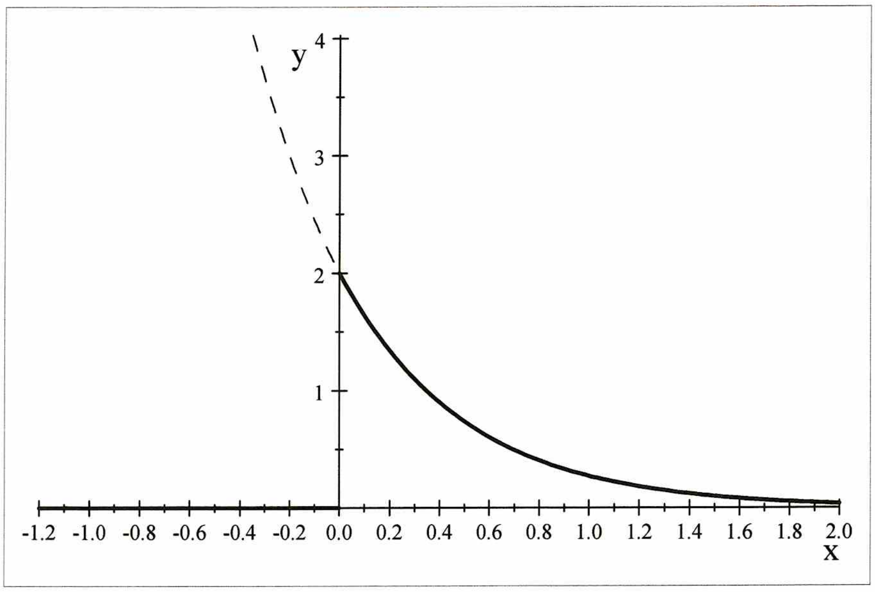
(2) $F(x) \to 0 \quad (\text{as } x \to -\infty)$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) \in [0, 1]$

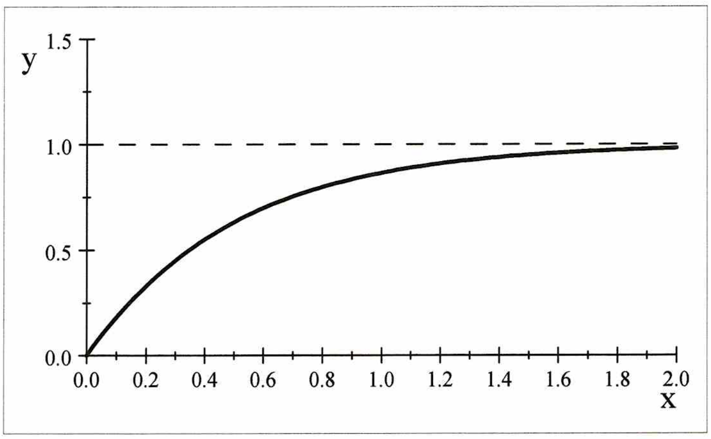
は勿論満たされる。(後で②をcheckする。)

$X \sim Ex(2)$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



$X \sim Ex(\lambda) \qquad (\lambda > 0)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

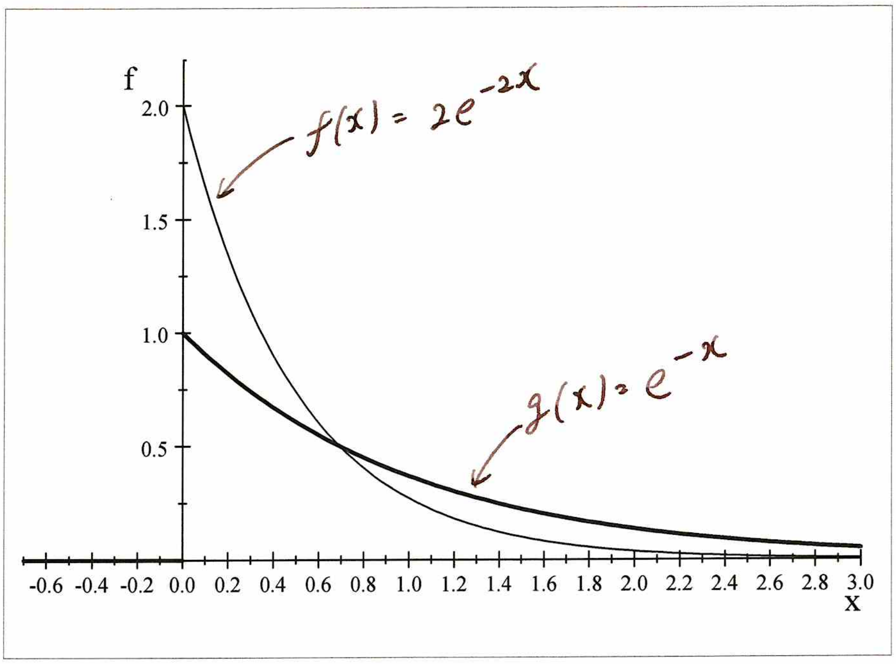
p.d.f.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$$

<u>check</u>

$$\begin{aligned} LHS &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \\ &= -0 + e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

//



f : p.d.f. of $Ex(2)$

g : p.d.f. of $Ex(1)$

両方 $-\infty$ から ∞ まで積分すると 1 になる.

$x=0$ において. f の方が高い所 $f(0)=2$ から

出発する分, g よりも速く横軸に漸近する。

モーメント母関数

$X \sim Ex(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

$\Rightarrow M(t) = E[e^{tX}] = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda)$

Proof

Let $t \in (-\infty, \lambda)$.

Then,

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} e^{(t-\lambda)x}\,dx \\
&\overset{t \neq \lambda}{=} \frac{\lambda}{t-\lambda}\left[e^{(t-\lambda)x}\right]_0^{\infty} \\
&\overset{t-\lambda<0}{=} \frac{\lambda}{t-\lambda}(0-1) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}.
\end{aligned}
$$

//

期待値・分散

$$X \sim Ex(\lambda)$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Proof.

We know that

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda), \text{ where } \lambda > 0.$$

Thus, $M'(t) = \dfrac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$.

$$\therefore M'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

Furthermore,

$$M''(t) = \frac{-2(\lambda-t)(-1)\lambda}{(\lambda-t)^{\cancel{4}}} = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$

$$\therefore M''(0) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$\therefore V[X] = M''(0) - (M'(0))^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\therefore E[X] = M'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

期待値・分散
(モーメント母関数を使わない方法)

$X \sim Ex(\lambda)$
$\rightarrow E[X] = 1/\lambda$
$V[X] = 1/\lambda^2$

(部分積分とロピタルの定理を用いる。)

Proof

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$f = x \qquad f' = 1$

$g' = \lambda e^{-\lambda x} \qquad g = -e^{-\lambda x}$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\therefore \int fg' = [fg] - \int f'g$

$$= \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{\lambda} \quad \lrcorner$$

We obtain that

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}. \quad \text{—(*)}$$

It holds that

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$f = x^2 \qquad f' = 2x$$

$$g' = \lambda e^{-\lambda x} \qquad g = -e^{-\lambda x}$$

$$\int f g' = [fg] - \int f' g$$

$$= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$$

(*)

$$= 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

Thus,

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}.$$

$\therefore E[X] = 1/\lambda$

$V[X] = 1/\lambda^2.$

//

※ 例えば $\lambda = 2$ のとき、
単位時間あたり平均2回事故が起こる。
この場合、事故が起こるまでの時間は、
平均すると 1/2 時間である。

例.

病院

X：待ち時間を表す r.v.

$X \sim Ex(2)$　　(パラメーター $\lambda = 2$)

とする。

1時間以上待つことになる確率を求めよ。

2時間以上の場合はどうか？

(※待ち時間の期待値は

$$E[X] = 1/\lambda = 1/2 = 30分$$
)

解.

X の p.d.f. は

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{if } x \geqq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

1時間以上待つことになる確率は？

$$\int_1^\infty 2e^{-2x}dx$$

$$= \left[-e^{-2x}\right]_1^\infty$$

$$= -0 + e^{-2}$$

$$= e^{-2} = 0.135335\cdots \quad \therefore \underline{約 13.53\%}$$

2時間以上待つことになる確率は？

$$\int_2^\infty 2e^{-2x}dx$$

$$= e^{-4} = 0.018315\cdots \quad \therefore \underline{約 1.83\%}$$

例.

病院の例で1時間以上, 2時間以下だけ待つことになる確率は?

解

$$\int_1^2 2e^{-2x}dx$$

$$= \left[-e^{-2x}\right]_1^2$$

$$= -e^{-4} + e^{-2}$$

$$= 0.117019\cdots$$

$\therefore$ 約 11.70 %

Th

$T \sim Ex(\lambda)$

$t \geqq 0$

$\Rightarrow P(T \geqq t) = e^{-\lambda t}$

※ $P(T \geqq t)$ 時刻tまでには事故が発生しない確率。

応用上、よく用いられる。

※ $T \sim Ex(\lambda)$

・p.d.f. $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \geqq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$

・distribution f.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & (t \geqq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

Proof.

$$\begin{aligned} P(T \geqq t) &= 1 - P(T \leqq t) \\ &= 1 - F(t) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$t \geqq 0$.

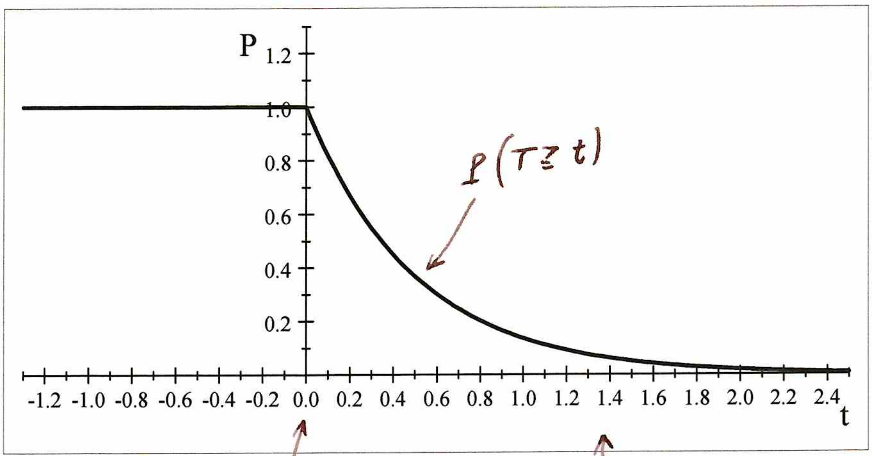
//

$T \sim Ex(\lambda)$

$\Rightarrow P(T \geqq t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & (t \geqq 0) \\ 1 & (t < 0) \end{cases}$

が成り立つが、
$t<0$ の場合は
使うことはほとんどない。

※ 逆もいえる。



・$t=0$までに事故が発生しない確率は1

・時間が経過するごとにその時間までに事故が発生しない確率は減少していく。

例.

T：電球が切れるまでの年数を表すr.v.

$T \sim Ex\left(\frac{1}{5}\right)$

とする。(この電球の平均寿命は5年。)

この電球が5年以上もつ(5年以下では切れない)

確率を求めよ。

また、10年以上，15年以上もつ確率も求めよ。

解

5年以上もつ確率は、

$$P(T \geqq 5) = e^{-\frac{1}{5}\cdot 5}$$

$$= e^{-1} = 0.367879\cdots$$

∴ 約36.79%

10年以上もつ確率は、

$$P(T \geqq 10) = e^{-\frac{1}{5}\cdot 10}$$

$$= e^{-2} = 0.135335\cdots$$

∴ 約13.53%

15年以上もつ確率は、

$$P(T \geqq 15) = e^{-\frac{1}{5}\cdot 15}$$

$$= e^{-3} = 0.049787\cdots$$

∴ 約4.98%

〈指数分布の無記憶性〉

(memoryless property)　　〈マルコフ性〉

Def.

T : r.v.

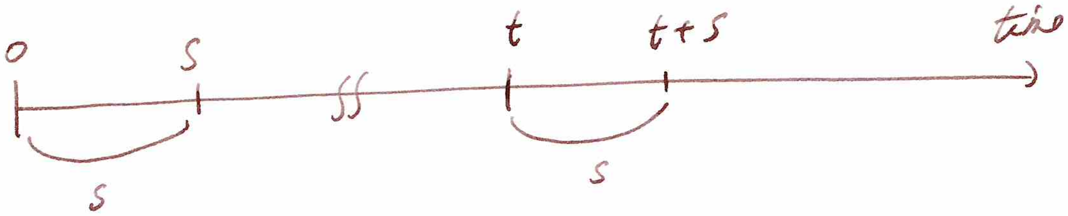
T has the <u>memoryless property</u>.

$\Longleftrightarrow {}^{\forall} t, s > 0,\ P(T \geqq t+s \mid T \geqq t) = P(T \geqq s)$

時刻 t まで事故が発生しなかったという条件の下で
そこから s 時間だけ事故が発生しない確率
($P(T \geqq t+s \mid T \geqq t)$)

$\parallel$

時刻 s までの間に事故が発生しない確率.
($P(T \geqq s)$)



Th

$X \sim Ex(\lambda)$

$\Rightarrow$ X has the memoryless property.

Proof.

Let $x, y \in \mathbb{R}$.

We will prove that

$$P(X \geqq x+y \mid X \geqq y) = P(X \geqq x).$$

$$\begin{aligned}
LHS &= P(X \geqq x+y \mid X \geqq y) \\
&= \frac{P(X \geqq x+y)}{P(X \geqq y)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} \\
&= \frac{e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda y}}{e^{-\lambda y}} \\
&= e^{-\lambda x} \\
&= P(X \geqq x) = RHS.
\end{aligned}$$

//

※無記憶性をもつのは指数分布と幾何分布のみ。

例.

T: 電球が切れるまでの年数を表す r.v.

$$T \sim Ex\left(\frac{1}{5}\right)$$

とする。(この電球の平均寿命は5年。)

使用し始めてから5年経過したところだが、

今のところ電球は切れていない。

今後5年以内にはこの電球が切れない

確率を求めよ。

解.

指数分布の無記憶性から

$$P(T \geqq 5+5 \mid T \geqq 5)$$

$$= P(T \geqq 5)$$

$$= e^{-\frac{1}{5}\cdot 5}$$

$$= e^{-1} = 0.367879\cdots$$

$\therefore$ 約 36.78 %

cf. $P(T \geqq 10) =$ 約 13.53 %

Def. (hazard function)

$$h(t) = \boxed{\frac{f(t)}{P(T \geqq t)}}$$

時刻tまでは事故が起こらなかったという条件の下で
時刻tの事故発生(危険)の度合いを表す指標。

Th

$X \sim Ex(\lambda)$
$x \geqq 0$
$\Rightarrow h(x) = \lambda$

$x\ (\geqq 0)$ の値にかかわらず危険度は一定。
(hazard f. の値)

(∵) Let $x \geqq 0$.
Then,

$$h(x) = \frac{f(x)}{P(X \geqq x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda.$$

//

※ $x < 0$ のときは
$h(x) = 0$.

指数分布

問題1. ある交差点において単位時間当たり平均でλ回事故が発生するとする。また、Xを事故が発生するまでの時間を表す確率変数とする。このとき、Xの確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

と表されることを証明しなさい。

問題2. Xはパラメーターλの指数分布に従う確率変数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) Xの確率密度関数fと分布関数Fは、どう表されるか？

(2) (1)で答えた確率密度関数を積分すると分布関数Fになることを確認しなさい。

(3) (1)で答えた確率密度関数を全範囲で積分すると1になることを確認しなさい。

(4) Xのモーメント母関数$M(t)$を求めなさい。

(5) Xの期待値$E[X]$と分散$V[X]$を求めなさい。

問題3. あなたはデパートの売り場で接客をしているとする。今、一人のお客さんを接客し終えた。Xを次のお客さんが来るまでの時間を表す確率変数とする。また、

$$X \sim Ex(6)$$

とする。つまり、Xはパラメーター$\lambda = 6$を持つ指数分布に従う。

(1) 次のお客さんが来るまでの時間の期待値と標準偏差はいくらか？

(2) 15分以内に次のお客さんが来る確率を求めなさい。

(3) この売り場で接客しているのはあなた一人なのだが、急にトイレに行きたくなった。トイレに立つ10分の間にお客さんが来ない確率はいくらか。

問題4. 確率変数の無記憶性(memoryless property)とは何かを述べ、指数分布が無記憶性を持つことを証明しなさい。

問題5. ある人が失業してから再び就職の機会に恵まれるまでの時間Xは、指数分布に従うとする。また、この人が就職できるまでに要する時間の期待値は、2か月であることがわかっている。以下の問いに答えなさい。

(1) 就職できるまでの時間の標準偏差はいくらか？

(2) この人は、失業してからすでに2か月経ってしまった。この先、1か月以内に就職できる確率を求めなさい。

問題6. レジュメの例などを参考にして、指数分布を用いる問題を自分で考え、それに解答を与えなさい。