# Basic concepts

## Interior, exterior, and boundary

$(X, d)$ MS

$A \subset X$

- $\operatorname{Int} A = \{x \in X \mid \exists r > 0 : S_r(x) \subset A\}$

  $= \{x \in X \mid \exists r > 0 : S_r(x) \cap A^c = \phi\}$

  the <u>interior</u> of $A$ 内部

- $A^e = \{x \in X \mid \exists r > 0 : S_r(x) \subset A^c\}$

  $= \{x \in X \mid \exists r > 0 : S_r(x) \cap A = \phi\}$

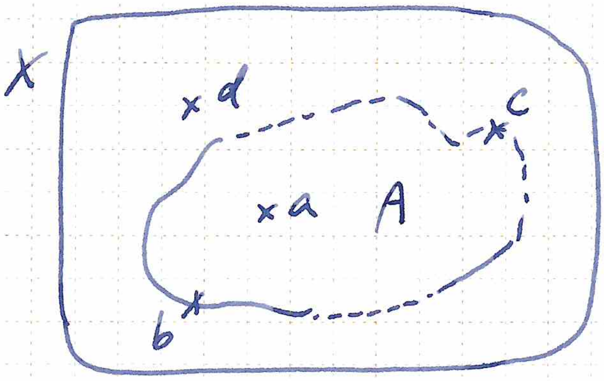
  the <u>exterior</u> of $A$ 外部

- $A^b = (\operatorname{Int} A)^c \cap (A^e)^c$

  $= \{x \in X \mid \forall r > 0,\ S_r(x) \not\subset A,\ S_r(x) \not\subset A^c\}$

  $= \{x \in X \mid \forall r > 0,\ S_r(x) \cap A \neq \phi,$
  $S_r(x) \cap A^c \neq \phi\}$

  the <u>boundary</u> of $A$ 境界




| | IntA | $A^e$ | $A^b$ |
|---|---|---|---|
| A | a | | b |
| $A^C$ | | d | c |

- $A^e = \mathrm{Int}\, A^c$
- $A^b = (A^c)^b$

$(X, d)$ MS
$A \subset X$
$\Rightarrow \operatorname{Int} A \subset A$
$A^e \subset A^c$

$X$ MS
$A \subset X$
$\Rightarrow \operatorname{Int} A, A^e, A^b$
are a partition of $X$,

i.e $\begin{cases} X = \operatorname{Int} A \cup A^e \cup A^b \\ \operatorname{Int} A, A^e, A^b : \text{disjoint} \end{cases}$

Remark

- $(A^c)^b = A^b$
- $(A^b)^c = \operatorname{Int} A \cup A^e$

- $x \notin \operatorname{Int} A$

$\iff \forall r>0,\ S_r(x) \not\subset A$

$\iff \forall r>0,\ S_r(x) \cap A^c \neq \emptyset$

- $x \notin A^e$

$\iff \forall r>0,\ S_r(x) \not\subset A^c$

$\iff \forall r>0,\ S_r(x) \cap A \neq \emptyset$

- $x \notin A^b = (\operatorname{Int} A)^c \cap (A^e)^c = (\operatorname{Int} A \cup A^e)^c$

$\iff \exists r>0 : \left( \begin{array}{l} S_r(x) \subset A \text{ or} \\ S_r(x) \subset A^c \end{array} \right.$

$\iff \exists r>0 : \left( \begin{array}{l} S_r(x) \cap A = \emptyset \text{ or} \\ S_r(x) \cap A^c = \emptyset \end{array} \right.$

ex

$\mathbb{R}$

$A = (0, 1]$

Then, $\begin{cases} \operatorname{Int} A = (0,1) \\ A^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \\ A^b = \{0, 1\} \end{cases}$

ex

$\mathbb{R}$

$A = \{2\}$

Then, $\begin{cases} \operatorname{Int} A = \phi \\ A^e = A^c \\ A^b = \{2\} = A \end{cases}$

ex

$\mathbb{R}$

$A = \{3, 3.1, 3.14, \cdots\}$

Then, $\begin{cases} \operatorname{Int} A = \phi \\ A^e = A^c \setminus \{\pi\} \\ A^b = A \cup \{\pi\}. \end{cases}$

ex

$X = (0,1] \cup \{2\}$ $(\subset \mathbb{R})$

$A = \{2\} \subset X$ $(\subset \mathbb{R})$

Then, $\mathrm{Int}\,A$, $A^e$, $A^b = ?$

Note that $S_{\frac{1}{2}}(2) = \{2\}$.

Thus, $\begin{cases} \mathrm{Int}\,A = \{2\} \\ A^e = (0,1] \\ A^b = \phi \end{cases}$.

ex

$X$ discrete metric space

$A \subset X$

Then, $\begin{cases} \mathrm{Int}\,A = A \\ A^e = A^c \\ A^b = \phi \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} (X,d)\ \text{MS} \\ A \subset X \\ \text{Then, } A : \text{open in } X. \\ \qquad \Longleftrightarrow \operatorname{Int} A = A \end{array}}$$

Proof

It holds true that

$\operatorname{Int} A = A$

$\Longleftrightarrow \operatorname{Int} A \supset A$

$\Longleftrightarrow {}^{\forall} x \in A,\ x \in \operatorname{Int} A$

$\Longleftrightarrow {}^{\forall} x \in A,\ {}^{\exists} r > 0 : S_r(x) \subset A$

$\Longleftrightarrow A : \text{open in } X.$

//

※ $\operatorname{Int} A$ is open set.

$(X, d)$ MS
$B \subset A \subset X$
$B$ : open in $X$
$\Rightarrow B \subset \operatorname{Int} A$

Proof.

Let $x \in B$.
We show that $x \in \operatorname{Int} A$.
i.e. $\exists r > 0 : S_r(x) \subset A$.

As $x \in B$ and $B$ is open in $X$,
$\exists r > 0 : S_r(x) \subset B$.

As $B \subset A$, we have $S_r(x) \subset A$.
$\therefore \exists r > 0 : S_r(x) \subset A$.
This shows that $x \in \operatorname{Int} A$. //

※ $\operatorname{Int} A$ は、$A$ に含まれる（包含関係の意味で）最大の開集合である。

$A$ : open in $X$.
$\iff A^b \subset A^c$

Proof

It holds true that

$$
\begin{aligned}
& A^b \subset A^c \\
\iff & (A^b)^c \supset A \\
\iff & \mathrm{Int}\,A \cup A^e \supset A \\
\iff & \mathrm{Int}\,A \supset A \\
\iff & \mathrm{Int}\,A = A \\
\iff & A : \text{open in } X.
\end{aligned}
$$

$A^e \subset A^c$
$\therefore A \cap A^e = \phi$

//

$A \cap C = \phi$
Then, $A \subset B \cup C$
$\iff A \subset B$

※ 開集合
$\iff$ 境界を含まない。

$$\boxed{\begin{array}{l} A : \text{closed in } X. \\ \Longleftrightarrow A^b \subset A \end{array}}$$

Proof

It holds that

$A$ : closed in $X$.

$\Longleftrightarrow A^c$ : open in $X$.

$\Longleftrightarrow (A^c)^b \subset (A^c)^c$

$\Longleftrightarrow A^b \subset A$.

//

※ 閉集合

$\Longleftrightarrow$ 境界を含む。

# Interior, exterior and boundary

1. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$の (1) 内点, (2) 外点, (3) 境界点について定義と例を述べよ. また, 点$x \in X$がそれらではないとはどういうことかを述べ, 例を挙げて説明せよ.

2. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. (1) $A^e = \mathrm{Int}A^C$ (2) $A^b = (A^C)^b$ (3) $(A^C)^b \neq (A^b)^C$ (4) $\mathrm{Int}A \subset A$ (5) $A^e \subset A^C$ となることを納得せよ.

3. $\mathbb{R}$の部分集合$A = (0,1) \cup (1,2]$, $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\} \cup (2,3]$を考えるとき, これらの (a) 内部, (b) 外部, (c) 境界 を答え, 問題2の(1)-(5)が成り立っていることを確認せよ.

4. $X$を離散距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$の (1) 内部, (2) 外部, (3) 境界はどうなるか？

5. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$が$X$の開集合であることは, $\mathrm{Int}A = A$と同値である. これを示せ.

6. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $\mathrm{Int}A$は$A$に含まれる（包含関係の意味で）最大の開集合である. このことを示せ.

7. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$が$X$の開集合であることは, $A$が境界を含まないこと, すなわち$A^b \subset A^C$と同値である. これを示せ.

8. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$が$X$の閉集合であることは, $A$が境界を含むこと, すなわち$A^b \subset A$と同値である. これを示せ.

# Contact point, accumulation point, and isolated point

$(X, d)$ metric space

$A \subset X$

- $x \in X$ <u>contact point</u> of $A$ 触点

  $\Leftrightarrow {}^{\forall} r > 0,\ S_r(x) \cap A \neq \phi$

  $\bar{A} \equiv \{x \in X \mid x \text{ is a contact point of } A.\}$

  the <u>closure</u> of $A$. 閉包

- $x \in X$ <u>accumulation point</u> of $A$ 集積点

  $\Leftrightarrow {}^{\forall} r > 0,\ S_r(x) \cap \left(A \setminus \{x\}\right) \neq \phi$

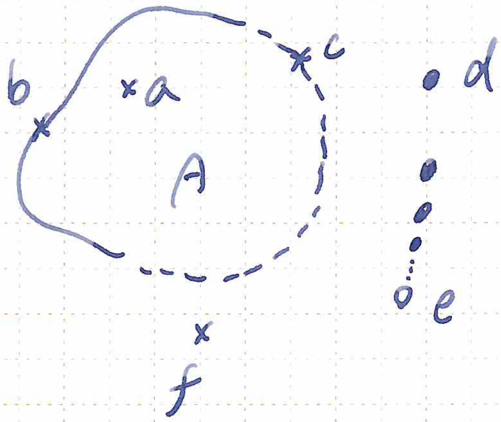
  $A^d \equiv \{x \in X \mid x \text{ is an accumulation point of } A.\}$

  the <u>derived set</u> of $A$ 導集合

- $x \in A$ : <u>isolated point</u> of $A$ 孤立点

  $\Leftrightarrow \exists r > 0 : S_r(x) \cap \left(A \setminus \{x\}\right) = \phi$

  $\mathrm{Iso}\, A \equiv \{x \in X \mid x \text{ is an isolated point of } A.\}$




| | $\bar{A}$ | $A^d$ | $\mathrm{Iso}\,A$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $a, b, d$ | $a, b$ | $d$ |
| $A^c$ | $c, e$ | $c, e$ | |

- $A \subset \bar{A}$
- $A^d \subset \bar{A}$
- $x \in \mathrm{Iso}\,A$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ① \; x \in A \\ ② \; x \notin A^d \end{cases}$$

- $\mathrm{Iso}\,A = A \cap (A^d)^c$

cf.

$(X, d)$ MS

$A \subset X$

- $x \notin \overline{A}$

  $\Longleftrightarrow {}^{\exists} r > 0 : S_r(x) \cap A = \phi$

- $x \notin A^d$

  $\Longleftrightarrow {}^{\exists} r > 0 : S_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$

  $\Longleftrightarrow {}^{\exists} r > 0 : S_r(x) \cap A \cap \{x\}^c = \phi$

  $\Longleftrightarrow {}^{\exists} r > 0 : S_r(x) \cap A \subset \{x\}$

  open sphere と A の共通点は $x$ のみ.

- $x \notin \mathrm{Iso}\, A$

  $\Longleftrightarrow \begin{cases} ① \ x \notin A \ \text{or} \\ ② \ {}^{\forall} r > 0,\ S_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi \end{cases}$

  どんな open sphere を考えても, それと A が $x$ 以外の共有点をもつ。

ex

$X = \mathbb{R}$

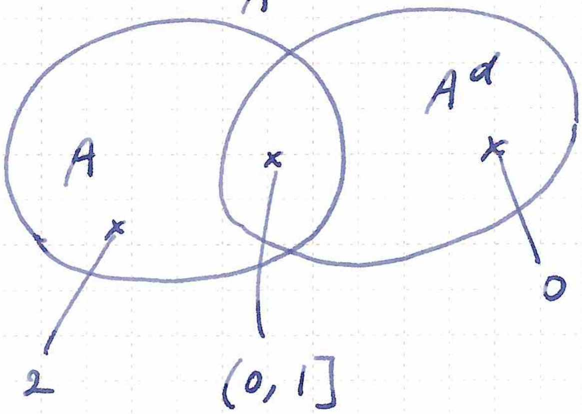
$A = (0,1] \cup \{2\}$

Then, $\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$

$A^d = [0,1]$

$\text{Iso}\, A = \{2\}$

$\bar{A} = A \cup A^d$



ex

$X = \mathbb{R}$

Then, $\overline{X} = X^d = X$

$\mathrm{Iso}\, X = \phi$

ex

$X = \{x\}$

Then, $\overline{X} = \{x\}$

$X^d = \phi$

$\mathrm{Iso}\, X = \{x\}$

ex

$X = \mathbb{R}$

$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$

Then, $\overline{A} = A \cup \{0\}$

$A^d = \{\pi\}$

$\mathrm{Iso}\, A = A$ .

$X$ discrete metric space

$A \subset X$

$\Longrightarrow \overline{A} = A$

$A^d = \emptyset$

$\operatorname{Iso} A = A$

$(X, d)$ MS

$A \subset X$

$\Rightarrow$ Equivalent

① $x \in \bar{A}$

i.e. $\forall r > 0,\ S_r(x) \cap A \neq \emptyset$

② $\exists \{x_n\} \subset A : x_n \to x$

Proof

① $\Rightarrow$ ②

From ①, $\forall r > 0,\ \exists x_r \in A : d(x, x_r) < r$.

Letting $r = 1/n > 0$, we have

$$\exists x_n \in A : d(x, x_n) < \frac{1}{n}$$

$\therefore \exists \{x_n\} \subset A : x_n \to x$. ⌟

② $\Rightarrow$ ①

Let $r > 0$.

From ②, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < r$,

where $x_n \in A$.

Therefore, $\exists x_{n_0} \in A : d(x_{n_0}, x) < r$.

$\therefore S_r(x) \cap A \neq \emptyset$.

//

$(X, d)$ MS

$A \subset X$

$\Rightarrow$ Equivalent

① $x \in A^d$

② $\exists \{x_n\} \subset A : \begin{cases} x_n \to x \\ x_n \neq x \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

ex

$X = \mathbb{R}$

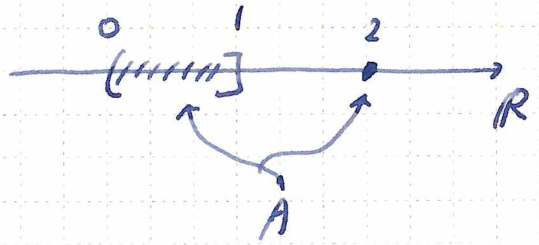
$A = (0, 1] \cup \{2\}$

- Then, $2 \in \overline{A}$.

  Indeed, $\exists \{x_n\} = \{2, 2, 2, \cdots\} \subset A : x_n \to 2$.

- However, $2 \notin A^d$.

  Indeed, $\nexists \{y_n\} \subset A : \begin{cases} y_n \to 2 \\ y_n \neq 2 \end{cases}$.



$X$ MS

$A \subset X$

$\Rightarrow$ Equivalent

① $A$ : closed in $X$.

② $\overline{A} = A$

③ $\overline{A} \subset A$

Proof

As $\overline{A} \supset A$, ② $\Leftrightarrow$ ③ holds.

① $\Rightarrow$ ③

Let $x \in \overline{A} (\subset X)$.

Then, $\exists \{x_n\} \subset A : x_n \to x (\in X)$.

From ①, $x \in A$.

$\therefore \overline{A} \subset A$.

③ $\Rightarrow$ ①

Let $\{x_n\} \subset A : x_n \to x \in X$.

Then, $x \in \overline{A}$.

From ③, $x \in (\overline{A} \subset) A$.

$\therefore x \in A$.

Thus, $A$ is closed in $X$.

//

cf.

$X$ MS

$A \subset X$

$\Longrightarrow$ Equivalent

① $A$ : closed in $X$.

i.e. $A^c$ : open in $X$.

i.e. $\forall x \in A^c$,

$\exists r > 0 : S_r(x) \subset A^c$

② $\{x_n\} \subset A : x_n \to x \in X$

$\Longrightarrow x \in A$

③ $A^b \subset A$

④ $\overline{A} = A$

⑤ $\overline{A} \subset A$

$X$ metric space

$A \subset X$

$A \subset B$

$B$ : closed in $X$

$\Longrightarrow \overline{A} \subset B$

Proof

Let $x \in \overline{A}$.

We show that $x \in B$.

As $x \in \overline{A}$,

$\exists \{x_n\} \subset A \subset B : x_n \to x$.

As $B$ is closed and $\{x_n\} \subset B$, we obtain $x \in B$.

//

※ $\overline{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合である。

# Contact point, accumulation point and isolated point

1. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$の (1) 触点, (2) 集積点, (3) 孤立点について定義と例を述べよ. また, 点$x \in X$がそれらではないとはどういうことかを述べ, 例を挙げて説明せよ.

2. $\mathbb{R}$の部分集合$A = (0,1) \cup (1,2]$, $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\} \cup (2,3]$を考えるとき, これらの (a) 閉包, (b) 導集合, (c) 孤立点の集合 を答えよ.

3. $X$を離散距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$の (1) 閉包, (2) 導集合, (3) 孤立点の集合はどうなるか？

4. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$の触点と集積点の点列を用いた特徴付けについて述べよ.

5. $X$を距離空間, $A$をその部分集合とする. $A$が$X$の閉集合であることは, $\overline{A} \subset A$と同値である.

(1) この同値性を示せ.

(2) 開集合や閉集合ということは全空間をどことみなすかによって変わるのであった. 条件$\overline{A}$のどこに全空間に関する情報が含まれているか？

6. $A$の閉包$\overline{A}$は, $A$を含む(包含関係の意味で)最小の閉集合である. このことを証明せよ.

7. $X$を距離空間, $x_0 \in X$, $r > 0$とする. また,

$$S_r[x_0] = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

と書くことにする. 包含関係$\overline{S_r(x_0)} \subset S_r[x_0]$を証明せよ. また, 逆は言えないことを示す例を挙げよ.