Uniformly continuous mappings

Def

X, Y MSs

$f: X \to Y$ uniformly continuous (u.c.)

$\Leftrightarrow d(x_n, y_n) \to 0$

$\Longrightarrow d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$

一様連続

negation

$f: X \to Y$ not uc.

$\Leftrightarrow \exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset X:$

$$\begin{cases} d(x_n, y_n) \to 0 \\ d(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0 \end{cases}$$

X, Y MSs

$f: X \to Y$ Lipschitz

i.e. $\exists K \geq 0 : {}^\forall x, y \in X,$

$$d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) \quad \text{— } (*)$$

$\Rightarrow f$: u.c.

Proof

Let $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X : d(x_n, y_n) \to 0.$ — $(**)$

We demonstrate that

$$\underline{d(f(x_n), f(y_n)) \to 0.}$$

Using $(*)$ and $(**)$, we have

$$\begin{aligned} & d(f(x_n), f(y_n)) \\ & \overset{(*)}{\leq} K \cdot d(x_n, y_n) \\ & \overset{(**)}{\longrightarrow} 0 . \end{aligned}$$

//

$$\boxed{\begin{array}{l} X, Y \text{ MSs} \\ f : X \to Y \text{ u.c.} \\ \Rightarrow f : \text{continuous} \end{array}}$$

Proof.

Let $x \in X$ and let $(x_n) \subset X : x_n \to x$. — (*)

We demonstrate that

$$\underline{d(f(x_n), f(x)) \to 0.}$$

Define $y_n = x$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Then, from (*), $d(x_n, y_n) \to 0$.

As f is u.c.,

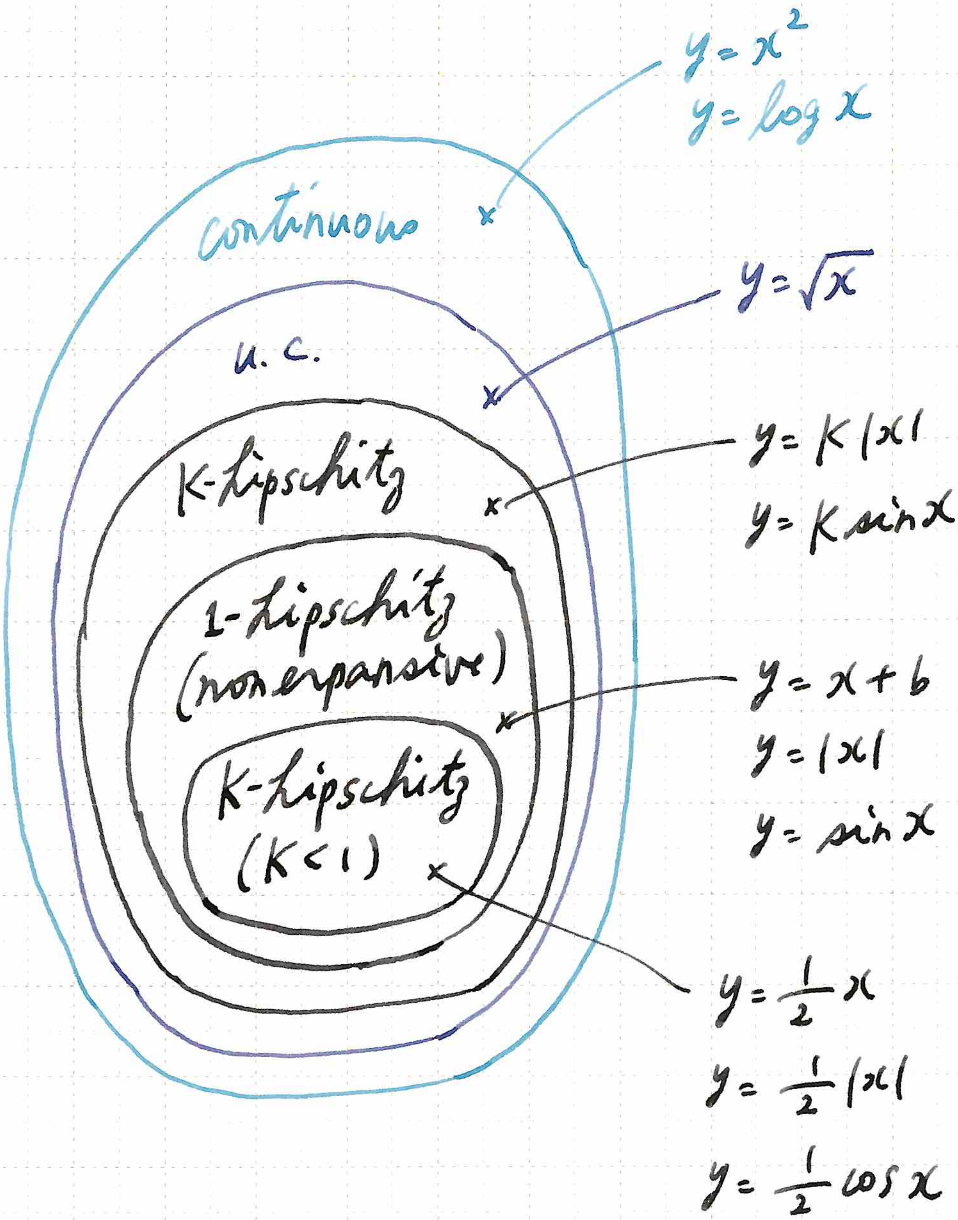
$$d(f(x_n), f(y_n)) \to 0 .$$

$$\parallel$$

$$d(f(x_n), f(x))$$

This completes the proof.

//


continuous
u. c.
K-Lipschitz
1-Lipschitz
(nonexpansive)
K-Lipschitz
(K<1)
$y = x^2$
$y = \log x$
$y = \sqrt{x}$
$y = K|x|$
$y = K \sin x$
$y = x + b$
$y = |x|$
$y = \sin x$
$y = \frac{1}{2}x$
$y = \frac{1}{2}|x|$
$y = \frac{1}{2}\cos x$

ex

$y = f(x) = x^2$

$\Rightarrow f$ is not u.c. on $\mathbb{R}$

Proof

Let $\begin{cases} x_n = n \\ y_n = n + \frac{1}{n}. \end{cases}$

Then, $d(x_n, y_n) = \frac{1}{n} \to 0.$

However,

$$
\begin{aligned}
& d(f(x_n), f(y_n)) \\
&= \left| n^2 - \left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} \right) \right| \\
&= \left| 2 + \frac{1}{n^2} \right| \not\to 0.
\end{aligned}
$$

//

ex

$y = f(x) = \log x$

$\Longrightarrow f$ is not u.c. on $(0, \infty)$.

Proof

Let $\begin{cases} x_n = \frac{1}{n} \in (0, \infty) \\ y_n = \frac{1}{n^2} \in (0, \infty) \end{cases}$.

Then, $d(x_n, y_n) \to 0$.

On the other hand,

$$
\begin{aligned}
& d(f(x_n), f(y_n)) \\
&= \left| \log \frac{1}{n} - \log \frac{1}{n^2} \right| \\
&= \left| \log n - 2 \log n \right| \\
&= \left| \log n \right| \\
&= \log n \to \infty .
\end{aligned}
$$

$\therefore d(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$.

//

$$\boxed{\begin{array}{l} X \text{ MS} \\ f : X \to \mathbb{R} \ \text{u.c.} \\ \Rightarrow |f| : \text{u.c.} \end{array}}$$

<u>Proof</u>

Let $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X : d(x_n, y_n) \to 0.$ — $(*)$

Our goal is to prove that

$$d\left(|f|(x_n), |f|(y_n)\right| \longrightarrow 0.$$

As f is u.c., it follows from $(*)$ that

$$d\left(f(x_n), f(y_n)\right) \to 0.$$

That is, $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0.$ — $(**)$

Hence,

$$\begin{aligned} & d\left(|f|(x_n), |f|(y_n)\right) \\ &= d\left(|f(x_n)|, |f(y_n)|\right) \\ &= \left| |f(x_n)| - |f(y_n)| \right| \\ &\leq |f(x_n) - f(y_n)| \\ &\xrightarrow{(**)} 0. \end{aligned}$$

//

X M.S.
$f, g : X \to \mathbb{R}$ u.c.
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \alpha f + \beta g$: u.c.

Proof

Assume that $d(x_n, y_n) \to 0$.

As f and g are u.c.,

$$\begin{cases} d(f(x_n), f(y_n)) \to 0 & \text{i.e. } |f(x_n) - f(y_n)| \to 0 \\ d(g(x_n), g(y_n)) \to 0 & \text{i.e. } |g(x_n) - g(y_n)| \to 0 \end{cases}$$

We show that

$$d(\alpha f(x_n) + \beta g(x_n), \alpha f(y_n) + \beta g(y_n)) \to 0.$$

i.e. $|\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) - \{\alpha f(y_n) + \beta g(y_n)\}| \to 0$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= |\alpha\{f(x_n) - f(y_n)\} + \beta\{g(x_n) - g(y_n)\}| \\ &\leqq |\alpha|\,|f(x_n) - f(y_n)| + |\beta|\,|g(x_n) - g(y_n)| \\ &\to 0. \end{aligned}$$

//

※ f, g : u.c.
$\not\Rightarrow$ $f \cdot g$: u.c.

Th.

$\boxed{\begin{array}{l} X, Y \text{ MSs} \\ X \text{ compact} \\ f: X \to Y \text{ continuous} \\ \Rightarrow f: \text{u.c.} \end{array}}$

Proof

Let $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X : d(x_n, y_n) \to 0.$ — (*)

We prove that $\underline{d(f(x_n), f(y_n)) \to 0}$.

i.e. $\forall \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}, \{y_{n_i}\} \subset \{y_n\},$

$\exists \{x_{n_j}\} \subset \{x_{n_i}\}, \{y_{n_j}\} \subset \{y_{n_i}\} :$

$$d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \to 0.$$

Let $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ and $\{y_{n_i}\} \subset \{y_n\}$.

As X is compact,

$$\left(\begin{array}{l} \exists \{x_{n_j}\} \subset \{x_{n_i}\}, x \in X : x_{n_j} \to x \\ \exists \{y_{n_j}\} \subset \{y_{n_i}\}, y \in X : y_{n_j} \to y. \end{array}\right.$$

— (**)

It holds that $x = y$.

Indeed,

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x, x_{n_j})}_{\to 0 \ (**)} + \underbrace{d(x_{n_j}, y_{n_j})}_{\to 0 \ (*)} + \underbrace{d(y_{n_j}, y)}_{\to 0}$$

$$\to 0.$$

Thus, $x = y$. ⌟

As f is continuous, from $(**)$, we have

$$\begin{cases} f(x_{n_j}) \to f(x) \\ f(y_{n_j}) \to f(y) = f(x). \end{cases}$$

Consequently,

$$d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j}))$$
$$\to d(f(x), f(y))$$
$$= d(f(x), f(x)) = 0.$$

//

この定理は、微分積分学において、『有界閉区間上で定義された連続関数はリーマン積分可能である』という定理を証明するときなどに用いられる。
実数空間における有界閉区間はコンパクトなので、そこで定義された連続関数は一様連続なのである。

X compact MS
Y MS
$f: X \to Y$ continuous
$\not\Rightarrow$ f: Lipschitz mapping

ex
$X = [0,1]$ $(\subset \mathbb{R})$
compact
$Y = \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ continuous
However, f is not a Lipschitz mapping.

Th

X, Y MSs

$f: X \to Y$

$\Rightarrow$ Equivalent

① f: u.c.

i.e. $d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$

$\neg$①: $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset X$:

$$\begin{cases} d(x_n, y_n) \to 0 & \text{— } (*) \\ d(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0 & \text{— } (**) \end{cases}$$

② $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

$\neg$②: $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x, y \in X$:

$$\begin{cases} d(x, y) < \delta \\ d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \end{cases}$$

Proof

①$\Rightarrow$②

We show that $\neg$② $\Rightarrow$ $\neg$①.

Letting $\delta = 1/n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$,

we obtain the desired result. $\lrcorner$

② $\Rightarrow$ ①

Let $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$: $d(x_n, y_n) \to 0$ —(*)

We demonstrate that

$$d(f(x_n), f(y_n)) \to 0.$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Let $\varepsilon > 0$.

From ②, $\exists \delta > 0$:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad \text{—(**)}$$

From (*), for $\delta > 0$,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, y_n) < \delta$.

$$\underset{(**)}{\Longrightarrow} d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$$

This completes the proof. //

Remark

$f: X \to Y$

- f: continuous

$\iff \forall x \in X$, f is continuous at x

$\iff \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:$
$\forall y \in X,\ d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

$x \in X$ごとに異なる$\delta > 0$が存在すればよい。

- f: u.c.

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x, y \in X,$
$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

$\delta > 0$は、$x \in X$と無関係に存在しなければならない。

cf.

$\{x_n^{(1)}\} = \{1, -1, 1, -1, \cdots\}$

$\exists 1 \geqq 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n^{(1)}| \leqq 1.$

$\{x_n^{(2)}\} = \{2, -2, 2, -2, \cdots\}$

$\exists 2 \geqq 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n^{(2)}| \leqq 2.$

$\cdots\cdots\cdots$

For these sequences,

$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists M_N \geqq 0 :$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n^{(N)}| \leqq M_N.$

$\updownarrow$

$\exists M \geqq 0 : \forall N \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ |x_n^{(N)}| \leqq M$

Uniformly continuous mappings

1. X, Yを距離空間とする. 写像$f : X \to Y$が一様連続であることと一様連続ではないということを正確に述べよ.

2. Lipschitz写像は一様連続である. このことを証明せよ.

3. 一様連続写像は連続である. このことを証明せよ.

4. 連続だが一様連続ではない関数, 一様連続だがLipschitz連続ではない関数の例を挙げよ.

5. Xを距離空間, fをX上の実数値関数で一様連続とする. このとき, $|f|$も一様連続関数であることを示せ.

6. Xを距離空間, $f, g : X \to \mathbb{R}$を一様連続関数とする. また, $a, b \in \mathbb{R}$とする. このとき, $af + bg$も一様連続関数であることを示せ.

7. Xをコンパクト距離空間, Yを距離空間, $f : X \to Y$を連続写像とする. このとき, fは一様連続になる. これを証明せよ.

8. Xをコンパクト距離空間, Yを距離空間, $f : X \to Y$を連続写像とする. このとき, fはLipschitz連続になるとは限らない. このことを示す例を挙げよ.

9. X, Y, Zを距離空間, $f : X \to Y$と$g : Y \to Z$を一様連続写像とする. このとき, 合成関数$g \circ f : X \to Z$も一様連続になる. これを証明せよ.

10. X, Yを距離空間, $f : X \to Y$とする. このとき, fが一様連続であることと条件
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
は同値である. このことを示せ.

11. X, Yを距離空間, $f : X \to Y$とする. fがX上で連続であることと一様連続であることの違いを説明せよ.

12. X, Yを距離空間, $f : X \to Y$をLipschitz写像とする. このとき,
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
が成り立つことを示せ. (この条件は問題10よりfが一様連続であることと同値なので, 本問は実質的には問題2と同じである.)

13. X, Yを距離空間とし, 写像$f : X \to Y$を一様連続とする. $\{x_n\}$をXのCauchy列とすると, $\{f(x_n)\}$はYのCauchy列である. このことを証明せよ.

14. 問題13において, $f : X \to Y$が連続というだけでは, $\{f(x_n)\}$はYのCauchy列になるとは限らない. このことを例をもって示せ.