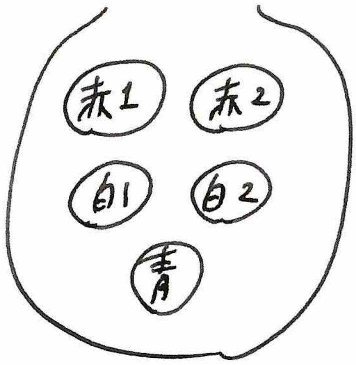
同時確率分布，周辺確率分布，条件付き確率分布

2次元確率変数 (X, Y: discrete)



2コ取り出す。

このときの取り出され方の数は、

$$ {}_5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = 10 \text{通り} $$

X: 赤の個数, r.v. $(X = 0, 1, 2)$

Y: 白 〃 〃 $(Y = 0, 1, 2)$

$$ P(X = i, Y = j) = P_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2) $$

同時確率関数 (joint probability)

$X \backslash Y$	0	1	2	計
0	0	$2/10$	$1/10$	$3/10$
1	$2/10$	$4/10$	0	$6/10$
2	$1/10$	0	0	$1/10$
計	$3/10$	$6/10$	$1/10$	1

Xの周辺確率

Yの周辺確率

$P_{00} = 0$, $P_{01} = \frac{2}{10}$, $P_{02} = \frac{1}{10}$ ---

$P_{10} = \frac{2}{10}$, ---

同時確率関数

jointly probability function

Xの周辺確率関数　marginal probability function

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{2} p_{ij} = p_{i\cdot}$$

← Yについては問わない
jについて足し上げる

例

$$P(X=0) = p_{0\cdot} = p_{00} + p_{01} + p_{02}$$
$$= 0 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=1) = p_{1\cdot} = p_{10} + p_{11} + p_{12} = \frac{6}{10}$$

$$P(X=2) = p_{2\cdot} = p_{20} + p_{21} + p_{22} = \frac{1}{10}$$

Remark

$$\boxed{\sum_{i=0}^{2} P(X=i) = \sum_{i=0}^{2} p_{i\cdot} = 1}$$

Yの周辺確率関数

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{2} p_{ij} = p_{\cdot j}$$

← Xについては問わない
iについて足し上げる

X, Y : conti. のケース
(連続)

$f(x, y)$: X, Y の同時密度関数 (同時確率密度関数)

$$P(a \leqq X \leqq b,\ c \leqq Y \leqq d)$$
$$= \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

X の周辺密度関数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

Y の周辺密度関数

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

Th

$f(x, y)$ jointly p.d.f. for X & Y

$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$ marginal density f. for X

$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$ " for Y

$$\Rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$$

例.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+3y^2) & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) この関数が (X,Y) の同時密度関数になることを確かめよ.

check

$$\boxed{\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}(2x+3y^2)\,dx\,dy = 1}$$

$$\text{LHS} = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy^2\right]_{x=0}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

┘

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2x+3y^2) & (x,y)\in[0,1]^2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

(2) XとYの周辺密度関数を求めよ.

Xの周辺密度関数

$$f_X(x)=\int_0^1\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)dy \quad , \text{ where } x\in[0,1]$$

$$=\left[xy+\frac{1}{2}y^3\right]_{y=0}^{1}$$

$$=\underline{x+\frac{1}{2}}$$

Yの周辺密度関数

$$f_Y(y)=\int_0^1\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)dx \quad , \text{ where } y\in[0,1]$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}xy^2\right]_{x=0}^{1}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} f_X(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & \text{if } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\\ \\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y^2 & \text{if } y\in[0,1]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{array}\right.$$

//

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+3y^2) & \text{if } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then, $$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2 & \text{if } y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

check

$$\boxed{\int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1}$$

$$\text{LHS} = \int_{x=0}^{1} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

//

check

$$\boxed{\int_{y=-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, dy = 1}$$

$$\text{LHS} = \int_{y=0}^{1} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y + y^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

//

条件付確率分布

X, Y r.v.

$X=x$ が与えられたときの条件付確率分布

(i) discrete

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

条件付確率関数

conditional probability function

(ii) continuous

$$f(y \mid X=x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$ 条件付密度関数

f: jointly density function 同時密度関数

f_X: marginal density function 周辺密度関数

※勿論、分母がゼロのときは定義されない。

例

X＼Y	1	2	3	計
1	0	1/10	2/10	3/10
2	1/10	2/10	4/10	7/10
計	1/10	3/10	6/10	1

← $P(X=1)=\frac{3}{10}$

$P(Y=3)=\frac{6}{10}$

・$X=1$ が与えられたときの Y の条件付き確率分布を求める。

$$P(Y=y \mid X=1) = \frac{P(X=1, Y=y)}{P(X=1)}$$

X＼Y	1	2	3	計
1	0	1/10	2/10	3/10
2				

この部分の値 $P(X=1, Y=y)$ を $P(X=1)\left(=\frac{3}{10}\right)$ で割ればよい。

$$\therefore P(Y=1 \mid X=1) = \frac{0}{3/10} = 0$$

$$P(Y=2 \mid X=1) = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=3 \mid X=1) = \frac{2/10}{3/10} = \frac{2}{3}$$

・ $Y=3$ が与えられたときの
X の条件付き確率分布を求める.

$$P(X=x \mid Y=3) = \frac{P(X=x,\ Y=3)}{P(Y=3)}$$

$X \backslash Y$	1	2	3
1			$\boxed{2/10}$
2			$\boxed{4/10}$
計			$6/10$

この部分の値
$P(X=x,\ Y=3)$ を
$P(Y=3)$ $\left(=\frac{6}{10}\right)$ で割ればよい。

$$\therefore\ P(X=1 \mid Y=3) = \frac{2/10}{6/10} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2 \mid Y=3) = \frac{4/10}{6/10} = \frac{2}{3}$$

同時密度関数 (joint density f.) が与えられれば、
周辺密度関数 (marginal density f.) も求まるし、

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

条件付密度関数 (conditional density f.) も求まる。

$$f(x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

例

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+3y^2) & \text{if } x, y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then,

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2 & \text{if } y \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) $f(x \mid Y=y) = ?$ where $y \in [0,1]$

First, assume that $x \in [0,1]$.

Then,

$$f(x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{x + \frac{3}{2}y^2}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2} = \frac{2x+3y^2}{1+3y^2}$$

yは与えられている定数

$$\therefore f(x \mid Y=y) = \begin{cases} \dfrac{2x+3y^2}{1+3y^2} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

※ $y \notin [0,1] \Rightarrow f(x \mid Y=y)$ is not well-defined.

(2) $f(y \mid X=x) = ?$ where $x \in [0,1]$

First, assume that $y \in [0,1]$.

Then,

$$f(y \mid X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{x + \frac{3}{2}y^2}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2x+3y^2}{2x+1}$$

$$\therefore f(y \mid X=x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3y^2}{2x+1} & y \in [0,1] \\ 0 & y \notin [0,1] \end{cases}$$

※ $x \notin [0,1] \Rightarrow f(y \mid X=x)$ is not well-defined.

例

- $X=x$ が与えられたときの Y の conditional density f.

$$f(y \mid X=x) = \begin{cases} \dfrac{3x+y}{3x+1} e^{-y} & (y \geqq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- X の marginal density f.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{4} e^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

これらの情報が与えられたとき、逆に

$$f(x \mid Y=y)$$

$$f_Y(y)$$

を求めることができる。

(1) joint density f. for X and Y = ?

$$f(y \mid X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$ より

$P(A \cap B) = P(A \mid B) P(B)$

$f(x,y) = f(y \mid X=x) f_X(x)$ が成り立つ。

$$\therefore\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x+y}{4} e^{-x-y} & x, y \geqq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

※ joint density f. が求まれば
他も求めることができる。

※ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = 1$ も check できる。

(2) marginal density f. for Y = ?

$$f_Y(y) = ?$$

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right) e^{-x} e^{-y}\,dx \qquad (y \geqq 0)$$

$$= e^{-y} \int_{x=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right) e^{-x}\,dx$$

$$\left(\begin{array}{ll} f = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y & g' = e^{-x} \\ f' = \frac{3}{4} & g = -e^{-x} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} (fg)' = f'g + fg' \\ \int fg' = fg - \int f'g \end{array}\right)$$

$$\therefore f_Y(y) = e^{-y}\left\{\left[-\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x}\right]_{x=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} \frac{3}{4} e^{-x}\,dx\right\}$$

$$= e^{-y}\left\{\left(-0 + \frac{1}{4}y\right) + \frac{3}{4}\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}\right\}$$

$$= e^{-y}\left\{\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}(-0+1)\right\}$$

$$= e^{-y}\left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}\right) \qquad (y \geqq 0)$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}\right)e^{-y} & (y \geqq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- joint density f. for X & Y

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x-y} & \text{if } x, y \geqq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- marginal density f. for Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}\right)e^{-y} & \text{if } y \geqq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(3) conditional density f. for X, given Y = y

(1) $x, y \geqq 0$

$$f(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x-y}}{\left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}\right)e^{-y}}$$

$$= \underline{\frac{3x+y}{y+3}\, e^{-x}}$$

(ii) $x<0,\ y \geqq 0$

$$f(x \mid Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{0}{\left(\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}\right)e^{-y}} = 0$$

(iii) $y<0$

$f(x \mid Y=y)$ is not well-defined.

$$f(x \mid Y=y) = \begin{cases} \dfrac{3x+y}{y+3} e^{-x} & \text{if } x \geqq 0 \\ 0 & \text{if } x<0 \end{cases}$$

※ $Y=y$ が与えられた下での x の条件付確率分布

（その確率密度関数が $f(x \mid Y=y)$ ）

であるが，そもそも $y \geqq 0$ の範囲で与えられないと

$f(x \mid Y=y)$ は定義できない。

（ $f_Y(y)=0$ だから。）

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x-y} & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1}$$

<u>check</u>

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy$$

$$\int_{x=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x}e^{-y}\,dx$$

$$= e^{-y}\int_{x=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x}\,dx$$

$$\left(\begin{array}{ll} f = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y & g' = e^{-x} \\ f' = \frac{3}{4} & g = -e^{-x} \end{array} \right)$$

$$= e^{-y}\left\{\left[-\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)e^{-x}\right]_{x=0}^{\infty} + \frac{3}{4}\int_{x=0}^{\infty} e^{-x}\,dx\right\}$$

$$= e^{-y}\left\{\left(-0 + \frac{1}{4}y\right) + \frac{3}{4}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$

$$= e^{-y}\left\{\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}(0+1)\right\}$$

$$= e^{-y}\left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}\right)$$

We will prove that

$$\int_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}\right)e^{-y}\,dy = 1$$

$$\left(\begin{array}{ll} f=\frac{1}{4}y+\frac{3}{4} & g'=e^{-y} \\ f'=\frac{1}{4} & g=-e^{-y} \end{array}\right)$$

Thus,

$$\begin{aligned}
&\int_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}\right)e^{-y}\,dy \\
&= \left[-\left(\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}\right)e^{-y}\right]_{y=0}^{\infty} + \int_{y=0}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-y}\,dy \\
&= \left(-0+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\left[-e^{-y}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-0+1) \\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

//

同時確率分布、周辺確率分布、条件付き確率分布

問題1.（2つの離散確率変数）

2つの離散確率変数の同時確率が下の表のように与えられているとする。

$X\backslash Y$	0	1	計
0		5/12	
1	1/12		1/6
計			

(1)表の空欄を埋めよ。

(2)X, Yの周辺確率関数を求めよ。

(3)$X=0$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=0)$を求めよ。

(4)$X=1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=1)$を求めよ。

(5)$Y=0$が与えられたときのXの条件付き確率関数$P(X=x|Y=0)$を求めよ。

(6)$Y=1$が与えられたときのXの条件付き確率関数$P(X=x|Y=1)$を求めよ。

問題2.（2つの離散確率変数）

2つの離散確率変数の同時確率が下の表のように与えられているとする。

$X\backslash Y$	−1	0	1	計
−1	1/8		0	2/8
0		2/8		
1	0			2/8
計	2/8	4/8		

(1)表の空欄を埋めよ。

(2)X, Yの周辺確率関数を求めよ。

(3)$X=-1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=-1)$を求めよ。

(4)$X=0$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=0)$を求めよ。

(5)$X=1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=1)$を求めよ。

問題3.（2つの連続確率変数）

2つの連続確率変数X, Yの同時確率密度関数が

$$f(x,y)=\begin{cases} 3e^{-x-3y} & x\geq 0,\quad y\geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と与えられている。

(1)$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$となることを確認せよ。

(2)X, Yの周辺確率密度関数$f_X(x)$, $f_Y(y)$を求めよ。

(3)$y=0$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数$f(x|Y=0)$を求めよ。

(4)$y=1$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数$f(x|Y=1)$を求めよ。

問題4.

2つの連続確率変数X, Yの同時確率密度関数を$f(x,y)$とする。ただし、$y \geq 0$とする。確率変数Yについての周辺確率密度関数が

$$f_Y(y) = \frac{3+y}{4}e^{-y},$$

$Y = y(\geq 0)$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数が

$$f(x|Y = y) = \begin{cases} \frac{3x+y}{3+y}e^{-x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

と与えられているとする。

(1) X, Yの同時確率密度関数を$f(x,y)$を求めよ。

(2) 確率変数Xの周辺確率密度関数$f_X(x)$を求めよ。

(3) $X = x$が与えられたときのYの条件付き確率密度関数$f(y|X = x)$を求めよ。

同時確率分布、条件付き確率分布

問題1.（2つの離散確率変数）
2つの離散確率変数の同時確率が下の表のように与えられているとする。

$X \backslash Y$	0	1	計
0		5/12	
1	1/12		1/6
計			

(1) 表の空欄を埋めよ。
(2) X, Yの周辺確率関数を求めよ。
(3) $X = 0$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = 0)$を求めよ。
(4) $X = 1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = 1)$を求めよ。
(5) $Y = 0$が与えられたときのXの条件付き確率関数$P(X = x|Y = 0)$を求めよ。
(6) $Y = 1$が与えられたときのXの条件付き確率関数$P(X = x|Y = 1)$を求めよ。

解答
問題1.
(1)

$X\backslash Y$	0	1	計
0	**5/12**	5/12	**5/6**
1	1/12	**1/12**	1/6
計	**1/2**	**1/2**	**1**

(2) Xの周辺確率関数は

$$P(X = x) = \begin{cases} 5/6 & x = 0 \\ 1/6 & x = 1 \end{cases},$$

Yの周辺確率関数は

$$P(Y = y) = \begin{cases} 1/2 & y = 0 \\ 1/2 & y = 1 \end{cases}$$

となる。
(3) $X = 0$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = 0)$は

$$P(Y = y|X = 0) = \frac{P(X = 0,\ Y = y)}{P(X = 0)} = \begin{cases} 1/2 & y = 0 \\ 1/2 & y = 1 \end{cases}$$

となる。
(4) $X = 1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = 1)$は

$$P(Y = y|X = 1) = \frac{P(X = 1,\ Y = y)}{P(X = 1)} = \begin{cases} 1/2 & y = 0 \\ 1/2 & y = 1 \end{cases}$$

となる。
(5) $Y = 0$が与えられたときのXの条件付き確率関数$P(X = x|Y = 0)$は

$$P(X = x|Y = 0) = \frac{P(X = x,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \begin{cases} 5/6 & x = 0 \\ 1/6 & x = 1 \end{cases}$$

となる。
(6) $Y = 1$が与えられたときのXの条件付き確率関数$P(X = x|Y = 1)$

$$P(X = x|Y = 1) = \frac{P(X = x,\ Y = 1)}{P(Y = 1)} = \begin{cases} 5/6 & x = 0 \\ 1/6 & x = 1 \end{cases}$$

となる。

問題2.（2つの離散確率変数）
2つの離散確率変数の同時確率が下の表のように与えられているとする。

$X\backslash Y$	-1	0	1	計
-1	1/8		0	2/8
0		2/8		
1	0			2/8
計	2/8	4/8		

(1) 表の空欄を埋めよ。
(2) X, Yの周辺確率関数を求めよ。
(3) $X = -1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = -1)$を求めよ。
(4) $X = 0$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = 0)$を求めよ。
(5) $X = 1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y = y|X = 1)$を求めよ。

解答
問題2.
(1)

$X\backslash Y$	-1	0	1	計
-1	1/8	**1/8**	0	2/8
0	**1/8**	2/8	**1/8**	**4/8**
1	0	**1/8**	**1/8**	2/8
計	2/8	4/8	**2/8**	**1**

(2)Xの周辺確率関数は

$$P(X=x)=\begin{cases}2/8 & x=-1\\ 4/8 & x=0\\ 2/8 & x=1\end{cases},$$

Yの周辺確率関数は

$$P(Y=y)=\begin{cases}2/8 & y=-1\\ 4/8 & y=0\\ 2/8 & y=1\end{cases}$$

となる。

(3)$X=-1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=-1)$は

$$P(Y=y|X=-1)=\frac{P(X=-1,\ Y=y)}{P(X=-1)}=\begin{cases}1/2 & y=-1\\ 1/2 & y=0\\ 0 & y=1\end{cases}$$

となる。

(4)$X=0$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=0)$は

$$P(Y=y|X=0)=\frac{P(X=0,\ Y=y)}{P(X=0)}=\begin{cases}1/4 & y=-1\\ 2/4 & y=0\\ 1/4 & y=1\end{cases}$$

となる。

(5)$X=1$が与えられたときのYの条件付き確率関数$P(Y=y|X=1)$は

$$P(Y=y|X=1)=\frac{P(X=1,\ Y=y)}{P(X=1)}=\begin{cases}0 & y=-1\\ 1/2 & y=0\\ 1/2 & y=1\end{cases}$$

となる。

問題3.（2つの連続確率変数）
2つの連続確率変数X, Yの同時確率密度関数が

$$f(x,y) = \begin{cases} 3e^{-x-3y} & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と与えられている。

(1) $\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$となることを確認せよ。

(2) X, Yの周辺確率密度関数$f_X(x)$, $f_Y(y)$を求めよ。

(3) $y = 0$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数$f(x|Y = 0)$を求めよ。

(4) $y = 1$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数$f(x|Y = 1)$を求めよ。

解答

問題3.

2つの連続確率変数X, Yの同時確率密度関数が

$$f(x,y) = \begin{cases} 3e^{-x-3y} & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と与えられている。

(1) 以下のように確認できる。

$$\begin{aligned}
&\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} 3e^{-x-3y}dxdy \\
&= 3\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} e^{-x}e^{-3y}dxdy \\
&= 3\int_{x=0}^{\infty} e^{-x}dx \cdot \int_{y=0}^{\infty} e^{-3y}dy \\
&= 3(-1)[e^{-x}]_{x=0}^{\infty} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)[e^{-3y}]_{y=0}^{\infty} \\
&= [e^{-x}]_{x=0}^{\infty} \cdot [e^{-3y}]_{y=0}^{\infty} \\
&= (0-1)\cdot(0-1) = 1
\end{aligned}$$

(2) Xの周辺確率密度関数$f_X(x)$は、$x \geq 0$に対しては、

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_{y=0}^{\infty} 3e^{-x-3y}dy \\
&= 3e^{-x}\int_{y=0}^{\infty} e^{-3y}dy \\
&= 3e^{-x}\left(-\frac{1}{3}\right)[e^{-3y}]_{y=0}^{\infty} \\
&= e^{-x}
\end{aligned}$$

となる。Yの周辺確率密度関数$f_Y(y)$は、$y \geq 0$に対しては、

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} 3e^{-x-3y}dx \\
&= 3e^{-3y}\int_{x=0}^{\infty} e^{-x}dx \\
&= 3e^{-3y}(-1)[e^{-x}]_{x=0}^{\infty} \\
&= 3e^{-3y}
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}
$$

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & \text{if } y \geq 0 \\ 0 & \text{if } y < 0 \end{cases}
$$

となる。

(3) $y = 0$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数$f(x|Y = 0)$は、(2)の結果を用いて、

$$
\begin{aligned}
f(x|Y = 0) &= \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} \\
&= \frac{f(x,0)}{3e^{-3\cdot 0}} = \frac{1}{3}f(x,0) \\
&= \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

と求めることができる。

(4) $y = 1$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数$f(x|Y = 1)$は、(2)の結果を用いて、

$$
\begin{aligned}
f(x|Y = 1) &= \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} \\
&= \frac{f(x,1)}{3e^{-3}} = \frac{e^3}{3}f(x,1) \\
&= \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

と求められる。

問題4.

2つの連続確率変数X, Yの同時確率密度関数を$f(x,y)$とする。ただし、$y \geq 0$とする。確率変数Yについての周辺確率密度関数が

$$f_Y(y) = \frac{3+y}{4}e^{-y},$$

$Y = y(\geq 0)$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数が

$$f(x|Y = y) = \begin{cases} \frac{3x+y}{3+y}e^{-x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

と与えられているとする。

（1）X, Yの同時確率密度関数を$f(x,y)$を求めよ。

（2）確率変数Xの周辺確率密度関数$f_X(x)$を求めよ。

（3）$X = x$が与えられたときのYの条件付き確率密度関数$f(y|X = x)$を求めよ。

解答

問題4.

2つの連続確率変数X, Yの同時確率密度関数を$f(x,y)$とする（$y \geq 0$）。確率変数Yについての周辺確率密度関数が

$$f_Y(y) = \frac{3+y}{4}e^{-y},$$

$Y = y$が与えられたときのXの条件付き確率密度関数が

$$f(x|Y = y) = \begin{cases} \frac{3x+y}{3+y}e^{-x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

と与えられているとする。

（1）定義式

$$f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

より、$x \geq 0$のとき、X, Yの同時確率密度関数を$f(x,y)$は、

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x|Y = y)f_Y(y) \\ &= \frac{3x+y}{3+y}e^{-x}\frac{3+y}{4}e^{-y} \\ &= \frac{3x+y}{4}e^{-x-y} \end{aligned}$$

と計算できる。$x \geq 0$以外の領域では、$f(x,y) = 0$なので、

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x+y}{4}e^{-x-y} & x \geq 0 \text{のとき} \\ 0 & x < 0 \text{のとき} \end{cases}$$

とまとめることができる。

（2）確率変数Xの周辺確率密度関数$f_X(x)$は、$x \geq 0$のとき、

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_{y=0}^{\infty} \frac{3x+y}{4} e^{-x-y} dy \\
&= \frac{e^{-x}}{4} \int_{y=0}^{\infty} (3x+y)e^{-y} dy
\end{aligned}
$$

となる。ここで、部分積分法を用いると、

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{\infty} (3x+y)e^{-y} dy \\
&= [-e^{-y}(3x+y)]_{y=0}^{\infty} - (-1)\int_{y=0}^{\infty} e^{-y} dy \\
&= [-e^{-y}(3x+y)]_{y=0}^{\infty} - [e^{-y}]_{y=0}^{\infty}
\end{aligned}
$$

ロピタルの定理を適用すると、

$$
\lim_{y\to\infty} \frac{3x+y}{e^y} = 0
$$

であることがわかる。よって、

$$
\begin{aligned}
I &= [0 - (-1)3x] - (0 - 1) \\
&= 3x + 1
\end{aligned}
$$

となる。したがって、

$$
f_X(x) = \frac{e^{-x}}{4} I = \frac{3x+1}{4} e^{-x}
$$

となる。以上より、

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{4} e^{-x} & x \geq 0\text{のとき} \\ 0 & x < 0\text{のとき} \end{cases}
$$

(3) $X = x(\geq 0)$が与えられたときのYの条件付き確率密度関数$f(y|X = x)$は、

$$
\begin{aligned}
f(y|X = x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{\frac{3x+y}{4} e^{-x-y}}{\frac{3x+1}{4} e^{-x}} = \frac{3x+y}{3x+1} e^{-y}
\end{aligned}
$$

となる。以上より、

$$
f(y|X = x) = \frac{3x+y}{3x+1} e^{-y} \quad (y \geq 0)
$$

となる。